

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”**

EDIȚIA A XXV-A, 16 MAI 2026

**Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și
protecția mediului**

CLASA a IX-a

BAREM DE CORECTARE

1. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, iar $S_n = n^2 + 3n$.

a) Arătați ca șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_n = 2n + 2$.

b) Calculați suma $P = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{1011}} + \sqrt{a_{1012}}}$.

c) Arătați că $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$, $n \geq 2$

a)	$S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - [(n-1)^2 - 3(n-1)] = 2n + 2$ <p>$(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă $a_n - a_{n-1}$ constant. Și deci $a_n - a_{n-1} = 2$ este rația progresiei.</p>	1p 1p
b)	$P = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_{1012}} - \sqrt{a_{1011}}}{a_{1012} - a_{1011}} =$ $= \frac{\sqrt{a_{1012}} - \sqrt{a_1}}{r} = \frac{\sqrt{2026} - 2}{2}$	1p 1p
c)	$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{r} \left(\frac{r}{a_1 \cdot a_2} + \frac{r}{a_2 \cdot a_3} + \frac{r}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{r}{a_{n-1} \cdot a_n} \right) =$ $= \frac{1}{r} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 \cdot a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \right) =$ $\frac{1}{r} \left(\frac{a_2}{a_1 \cdot a_2} - \frac{a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3}{a_2 \cdot a_3} - \frac{a_2}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \right) =$ $\frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1 + (n-1)r - a_n}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$	1p 1p 1p

2. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $|2x - 6| + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7$;

b) $\left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x-2}{6} \right] = \frac{5x-4}{3}$;

c) Rezolvați inecuația: $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| + \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \leq 2$.

a)	<p>Ecuția se poate scrie $2x-6 + x+1 =7$ unde</p> <p>Pt $x \in (-\infty; -1)$ avem $-2x+6-x-1=7$ cu soluția $x = \frac{2}{3} \notin (-\infty; -1)$.</p> <p>Pt $x \in [-1; 3)$ avem $-2x+6+x+1=7$ cu soluția $x = 0 \in [-1; 3)$</p> <p>Pt $x \in [3; \infty)$ avem $2x-6+x+1=7$ cu soluția $x = 4 \in [3; \infty)$</p>	1p 1p
b)	<p>Ecuția devine $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{5x-4}{6}$, notăm $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = t, k \in \mathbb{Z}$ și avem $x = \frac{6k+4}{5}$.</p> <p>Din $k \leq \frac{2 \cdot \frac{6k+4}{5} - 1}{5} < k+1$ obținem că $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$</p> <p>cu soluția $x \in \left\{-\frac{14}{5}; -\frac{8}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right\}$</p>	1p 1p 1p
c)	<p>Notăm $\left \frac{x-1}{x+2}\right = t \Rightarrow t + \frac{1}{t} \leq 2 \Rightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Rightarrow t = 1$</p> <p>$\Rightarrow \frac{x-1}{x+2} = \pm 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$</p>	1p 1p

3. Fie familia de parabole $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1, m \in \mathbb{R}^*$.

- Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $f_m(x) = 0$ are rădăcini reale.
- Să se arate ca varfurile parabolilor de află pe dreapta de ecuație $y = -x$.
- Arătați că toate parabolele trec printr-un punct fix.

a)	<p>Se impune condiția că $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4(m-1)^2 - 4m(m-1) \geq 0$ de unde obținem că $m \leq 1$</p> <p>Deoarece $m \in \mathbb{R}^*$ soluția este $m \in (-\infty; 1] - \{0\}$</p>	1p 1p
b)	<p>$x_v = \frac{1-m}{m}; y_v = \frac{m-1}{m}$</p> <p>Punctul V aparține dreptei dacă $y_v = -x_v$ de unde se verifică $\frac{m-1}{m} = -\frac{1-m}{m}$</p>	1p 1p
c)	<p>Se mai poate scrie $y + 2x + 1 = m(x+1)^2$</p> <p>unde egalitatea este adevărată dacă $x = -1$ și $y = 1$</p> <p>Deci $P(-1; 1)$</p>	1p 1p 1p

4. a) Dacă $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$, și $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ calculați $\sin 2x$ și $\cos 2x$.

b) Arătați că $\cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2 \sin 2^n x}$, pentru toate valorile din domeniul de definiție.

c) Demonstrați că $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 2^2 x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$, pentru toate valorile din domeniul de definiție.

a)	<p>$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ rezultă că $1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$ de unde $\sin 2x = \frac{3}{4}$</p> <p>Folosim formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ obținem că</p>	1p
-----------	---	-----------

	$\cos 2x = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$ <p>Cum $\frac{\pi}{2} < 2x < \pi$ atunci $\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$</p>	1p
b)	<p>Folosind $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ Dacă alegem $\theta = 2^n x$ și înlocuind în formulă, avem:</p> $\sin 2^{n+1} x = 2\sin 2^n x \cos 2^n x \text{ de unde } \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2\sin 2^n x}$	1p 1p
c)	<p>Vom folosi succesiv formula demonstrată la punctul b) pentru fiecare termen din produs:</p> $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}; \cos 2x = \frac{\sin 4x}{2\sin 2x}; \cos 4x = \frac{\sin 8x}{2\sin 4x}; \dots; \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2\sin 2^{n-1} x}$ <p>unde prin înmulțire</p> $P = \left(\frac{\sin 2x}{2\sin x}\right) \cdot \left(\frac{\sin 4x}{2\sin 2x}\right) \cdot \left(\frac{\sin 8x}{2\sin 4x}\right) \dots \left(\frac{\sin 2^n x}{2\sin 2^{n-1} x}\right) = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ <p>Observăm că este un produs telescopic: numărătorul unei fracții se simplifică cu numitorul următoarei fracții.</p>	2p 1p

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.