CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “SPIRU HARET”
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Clasa a XII-a

Problema 1
Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X^4-4X+3, g=X^3-3X+2$.
a) (2p) Descompuneți în factori ireductibili polinoamele f și g.
b) (2p) Demonstrați că dacă $a,b,c,d\in[-2,\infty]$, astfel încât $a+b+c+d=4$, atunci
$a^3+b^3+c^3+d^3\ge 4$ și $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4+2(a-1)^2+2(b-1)^2+2(c-1)^2+2(d-1)^2$.
c) (3p) Dacă $a+b+c+d=4$ și $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, demonstrați că
$$a^6+b^6+c^6+d^6\ge 4+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2.$$

Problema 2
Fie $a\in\mathbb{R}^*$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se dă legea de compoziție asociativă $"*"$ cu proprietatea că $x*y*z=(x-a)(y-a)(z-a)+a$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) (2p) Demonstrați că $(a+1)*(a+1)$ este element neutru al legii de compoziție
b) (3p) Demonstrați că $(a+1)*(a+1)=(a-1)*(a-1)$.
c) (2p) Determinați toate legile de compozitie cu proprietatea din enunț

Problema 3
a) (2p) Demonstraţi inegalitatea $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$, pentru orice numere $a,b>0$.
b) (2p) Demonstraţi că $\displaystyle\int_1^e \frac{x+1}{x^2+1}dx\le\frac{e}{2}$.
c) (3p) Calculați $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx$.

Problema 4
a) (1p) Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x+1)^n\,dx=\frac{n\cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
b) (2p) Demonstrați dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue, atunci
$\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$. (Inegalitatea lui Cauchy – Buniakovski - Schwartz)
c) (4p) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât
$f(1)=f(0)=0$. Să se arate că: $\left(\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx\right)^2\le\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)}\cdot\int_0^1(f'(x))^2dx,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.