CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Clasa a XI-a

Problema 1
Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ și $\lambda \in \mathbb{R}^*$, cu cel puțin una dintre matricele A și B inversabilă.
a) (4p) Dacă matricea $AB + \lambda I_n$ este inversabilă, atunci și matricea $BA + \lambda I_n$ este inversabilă.
b) (3p) Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ cu matricile $A + I_n$ și $B + I_n$ inversabile și
$(A + I_n)^{-1} + (B + I_n)^{-1} = I_n$. Demonstrați că $AB = I_n$.

Problema 2
(7p) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continuă cu proprietatea $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Demonstraţi că numărul $c = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \in [a,b]$.

Problema 3
Fie $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ o funcţie cu proprietatea

$$\min\left\{\sqrt{1-f^2(x)}, \sqrt{1-f^2(y)}\right\} \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \max\left\{\sqrt{1-f^2(x)}, \sqrt{1-f^2(y)}\right\}, \forall x \ne y.$$

a) (4p) Dacă $f(0) = 1$ demonstraţi că $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) (3p) Dacă $f(0) = 0$ demonstraţi că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Problema 4
Fie numărul real $k > 0$, $k \ne 1$. Se consideră șirul $(x_n)_{n \ge 1}$ definit prin relația de recurență
$x_{n+1} = \sqrt[p+q]{x_n^p \cdot x_{n-1}^q}$, oricare ar fi $n \ge 2$, $x_1 = k$, $x_2 = k^2$, unde p, q sunt numere naturale nenule.
a) (6p) Arătați că șirul $(x_n)_{n \ge 1}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;
b) (1p) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.