CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “SPIRU HARET”
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Clasa a X-a

Problema 1

a) (3p) Să se arate că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$.

b) (4p) Demonstrați că $|az_1 + bz_2|^2 - |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 - b^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2

a) (3p) Fie $a, b > 0$ și numerele naturale n, m cu $n > m$. Demonstrați că $\dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \geq \dfrac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a^m + b^m}$.

b) (4p) Fie $a, b > 1$ și numărul natural n. Demonstrați că
$(\log_a b)^{n+1} + (\log_b a)^{n+1} \geq (\log_a b)^n + (\log_b a)^n$.

Problema 3

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $(ab + ac + ad + bc + bd + cd)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right) = a + b + c + d.$

a)(1p) Demonstrați că $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) (3p) Demonstrați că are loc egalitatea

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^3 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} + \frac{3(a+b)}{a^2b^2}\left(1 + \frac{(c+d)(a+b)}{cd}\right) + \frac{3(c+d)}{c^2d^2}\left(1 + \frac{(a+b)(c+d)}{ab}\right).$$

c) (3p) Demonstrați că $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} + \dfrac{1}{d^3}} \in \mathbb{Q}.$

Problema 4

a) (2p) Fie $a, b \in [0,1]$. Demonstrați că $\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 1$.

b) (3p) Fie $a, b, c \in [0,1]$. Demonstrați că $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1$.

Generalizare.

c) (2p)Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Demonstrați că
$\sqrt{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \leq 1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.