

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
”SPIRU HARET”**

**EDIȚIA A XXV-A, 16 MAI 2026**

**Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și  
protecția mediului**

**CLASA a IX-a**

1. Notăm cu  $S_n$  suma primilor  $n$  termeni ai sirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ , iar  $S_n = n^2 + 3n$ .

a) (2p) Arătați ca șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este o progresie aritmetică cu  $a_n = 2n + 2$ .

b) (2p) Calculați suma  $P = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{1011}} + \sqrt{a_{1012}}}$ .

c) (3p) Arătați că  $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$ ,  $n \geq 2$ .

2. Rezolvați următoarele ecuații:

a) (2p)  $|2x - 6| + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7$ ;

b) (3p)  $\left[ \frac{2x-1}{3} \right] + \left[ \frac{4x-2}{6} \right] = \frac{5x-4}{3}$ ;

c) (2p) Rezolvați inecuația:  $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| + \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \leq 2$ .

3. Fie familia de parabole  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ .

a) (2p) Să se determine  $m \in \mathbb{R}^*$  pentru care ecuația  $f_m(x) = 0$  are rădăcini reale.

b) (2p) Să se arate ca vârfurile parabolilor de află pe dreapta de ecuație  $y = -x$ .

c) (3p) Arătați că toate parabolele trec printr-un punct fix.

4. a) (2p) Dacă  $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ , și  $x \in \left( \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$  calculați  $\sin 2x$  și  $\cos 2x$ .

b) (2p) Arătați că  $\cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2 \sin 2^n x}$ , pentru toate valorile din domeniul de definiție.

c) (3p) Demonstrați că  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 2^2 x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ , pentru toate valorile din domeniul de definiție.

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.**

**Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**