CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026

Filiera teoretică: Profilul real – Științe ale naturii

Clasa a IX-a

1. Demonstrați următoarele inegalități:
   a) **(3p)** $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c,$ oricare ar fi a,b,c numere reale strict pozitive.
   b) **(4p)** $\frac{x^2+yz}{y+z}+\frac{y^2+zx}{z+x}+\frac{z^2+xy}{x+y}\geq x+y+z$, oricare ar fi x,y,z numere reale strict pozitive.

2. Se consideră numerele reale nenule $a,\ b,\ c,\ d$ astfel încât $a=c+\frac{1}{c}$ și $b=d+\frac{1}{d}$.
   a) **(3p)** Arătați că numerele a,b,c,d nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
   b) **(4p)** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-abx+a^2+b^2-4$ intersectează axa Ox în cel puțin un punct.

3. Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ și $(x_n)_{n\geq1},\ (y_n)_{n\geq1}$ șiruri de numere reale cu $x_1=1,\ \mathrm{y}_1=2$ astfel încât $x_{n+1}=7x_n+5y_n$ și $y_{n+1}=4x_n+6y_n, \forall n\geq 2$.
   a) **(4p)** Demonstrați că șirul $(x_n+\lambda y_n)_{n\geq1}$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $\lambda\in\left\{-\frac{5}{4},1\right\}$.
   b) **(3p)** Determinați termenii x_{2026} și y_{2026}.

4. Se consideră triunghiul ABC și punctele O, I centrul cercului circumscris, respectiv centrul cercului înscris triunghiului. Mediatoarele segmentelor IA, IB, IC se intersectează două câte două formând triunghiul MNP.
   a) **(4p)** Demonstrați că I este ortocentrul triunghiului MNP.
   b) **(3p)** Demonstrați că $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"

EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026

Filiera teoretică: Profilul real – Științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a IX – a

1. Demonstrați următoarele inegalități:
   a) **(3p)** $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c,$ oricare ar fi a,b,c numere reale strict pozitive.
   b) **(4p)** $\frac{x^2+yz}{y+z}+\frac{y^2+zx}{z+x}+\frac{z^2+xy}{x+y}\geq x+y+z$, oricare ar fi x,y,z numere reale strict pozitive.

a)	$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c \Leftrightarrow$ $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab \mid\cdot 2\Leftrightarrow$ $(ab-ca)^2+(ab-bc)^2+(bc-ca)^2\geq 0.$	**1p** **1p** **1p**
b)	Notăm $y+z=a,\ z+x=b,\ x+y=c$, unde $a,b,c>0$ $\Rightarrow x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{a+c-b}{2},\ z=\frac{b+a-c}{2}$. Cu aceste notații, avem: $\frac{x^2+yz}{y+z}=\frac{1}{2}(a-b-c)+\frac{bc}{a}$ $\frac{y^2+zx}{z+x}=\frac{1}{2}(b-a-c)+\frac{ca}{b}$ $\frac{z^2+xy}{x+y}=\frac{1}{2}(c-a-b)+\frac{ab}{c}$ Inegalitatea de demonstrat devine: $\frac{1}{2}(-a-b-c)+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$ inegalitate adevărată conform cu **a)**.	**1p** **1p** **1p**

2. Se consideră numerele reale nenule a, b, c, d astfel încât $a=c+\frac{1}{c}$ și $b=d+\frac{1}{d}$.

a) **(3p)** Arătați că numerele a,b,c,d nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) **(4p)** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-abx+a^2+b^2-4$ intersectează axa Ox în cel puțin un punct.

a)	Presupenem că numerele a,b,c,d sunt termeni conseutivi ai unei progresii aritmetice. Astfel, rezultă: $\begin{cases} b=\frac{a+c}{2} \\ c=\frac{b+d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d+\frac{1}{d}=c+\frac{1}{2c} \\ c=d+\frac{1}{2d} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2d}=\frac{d}{2d^2+1}$. Nu există d care să verifice	**2p**
	această ecuație, deci numerele nu pot fi în progresie aritmetică.	**1p**
b)	Graficul funcției f intersectează axa Ox în cel puțin un punct dacă și numai dacă ecuația $f(x)=0$ are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$.	**1p**
	$\Delta=(ab)^2-4(a^2+b^2-4)=(a^2-4)(b^2-4)$	**1p**
	$\Delta=\left[\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-4\right]\left[\left(d+\frac{1}{d}\right)^2-4\right]$	**1p**
	$\Delta=\left(c-\frac{1}{c}\right)^2\left(d-\frac{1}{d}\right)^2\geq 0, \forall c,d\in\mathbb{R}^*$	**1p**

3. Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ și $(x_n)_{n\geq1}$, $(y_n)_{n\geq1}$ șiruri de numere reale cu $x_1=1$, $y_1=2$ astfel încât $x_{n+1}=7x_n+5y_n$ și $y_{n+1}=4x_n+6y_n, \forall n\geq 2$.

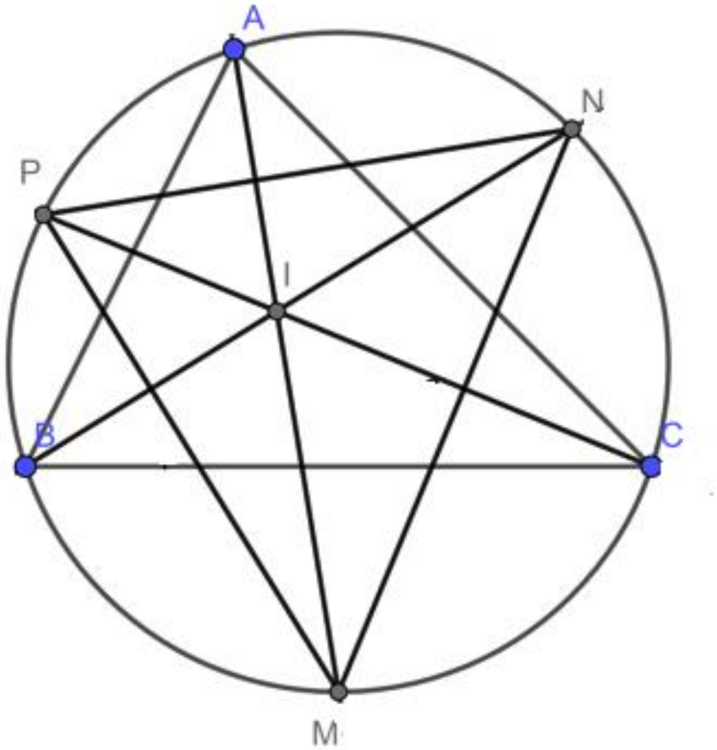
a) **(4p)** Demonstrați că șirul $(x_n+\lambda y_n)_{n\geq1}$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $\lambda\in\left\{-\frac{5}{4},1\right\}$.

b) **(3p)** Determinați termenii x_{2026} și y_{2026}.

a)	Din relațiile de recurență, obținem $\begin{cases} x_2=17 \\ y_2=16 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_3=199 \\ y_3=164 \end{cases}$	**1p**

	Dacă șirul $(x_n+\lambda y_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică, atunci: $(x_2+\lambda y_2)^2=(x_1+\lambda y_1)(x_3+\lambda y_3)$ Prin înlocuire, obținem $4\lambda^2+\lambda-5=0$, de obținem $\lambda\in\left\{-\frac{5}{4},1\right\}$. Pentru $\lambda=-\frac{5}{4}$, avem $x_{n+1}-\frac{5}{4}y_{n+1}=(7x_n+5y_n)-\frac{5}{4}(4x_n+6y_n)=2\left(x_n-\frac{5}{4}y_n\right)$, adică șirul $\left(x_n-\frac{5}{4}y_n\right)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu rația 2. Analog, pentru $\lambda=1$, avem $x_{n+1}+y_{n+1}=(7x_n+5y_n)+(4x_n+6y_n)=11(x_n+y_n)$, adică $(x_n+y_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu rația 11.	**1p** **1p** **1p**
b)	Conform **a)**, din formula termenului general al unei progresii geometrice, avem: $\begin{cases} x_n-\frac{5}{4}y_n=-3\cdot 2^{n-2} \\ x_n+y_n=3\cdot 11^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n=\frac{1}{3}(5\cdot 11^{n-1}-2^n) \\ y_n=\frac{1}{3}(4\cdot 11^{n-1}+2^n) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_{2026}=\frac{1}{3}(5\cdot 11^{2025}-2^{2026}) \\ y_{2026}=\frac{1}{3}(4\cdot 11^{2025}+2^{2026}) \end{cases}$	**2p** **1p**

4. Se consideră triunghiul ABC și punctele O, I centrul cercului circumscris, respectiv centrul cercului înscris triunghiului. Mediatoarele segmentelor IA, IB, IC se intersectează două câte două formând triunghiul MNP.
   a) **(4p)** Demonstrați că I este ortocentrul triunghiului MNP.
   b) **(3p)** Demonstrați că $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

a)		
	Dacă mediatoarele segmentelor IB și IC se intersectează în M și dacă notăm cu	**1p**
	D intersecția bisectoarei AI cu cercul circumscris triunghiului ABC, atunci	**1p**
	$\sphericalangle BID = \sphericalangle DBI$ și $\sphericalangle CID = \sphericalangle DCI$	
	$\Rightarrow DB = DI = DC$	
	$\Rightarrow D$ aparține atât mediatoarei segmentului BI, cât și mediatoarei segmentului	
	$CI \Rightarrow D = M \Rightarrow M$ se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.	**1p**
	Analog, se demonstrează că punctele N, P se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.	
	Deci $MI \perp NP,\ NI \perp MP,\ PI \perp MN \Rightarrow I$ este ortocentrul triunghiului MNP.	**1p**
b)	Cum punctele A, B, C, M, N, P se află pe cercul circumscris triunghiului ABC,	
	rezultă că O centrul cercului circumscris triunghiului MNP.	**1p**
	Conform relație lui Sylvester $\Rightarrow \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$	**2p**