CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIȚIA A XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică: Profilul real – Științe ale naturii

CLASA a XII-a

1. Se consideră funcția inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+arctgx.$

a) **(2p)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) **(2p)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) **(3p)** Calculați $\int_0^{1+\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-2^{-x}.$

a) **(2p)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

b) **(2p)** Calculați $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\ln(x^2+2)}dx$.

c) **(3p)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+f\left(x^{2025}\right)\right)dx \geq \int_0^1\left(f\left(x^2\right)+f\left(x^{2026}\right)\right)dx$.

3. Se consideră polinomul $f=mX^3+(m+1)X^2+(1-2m)X-2$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3 și $m\in\mathbb{R}^*$.

a) **(2p)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât polinomul f să se dividă prin polinomul $g=X+1$.

b) **(2p)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=4$.

c) **(3p)** Determinați valorile lui $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care polinomul admite trei rădăcini reale distincte.

4. Se consideră grupul abelian $(G,*)$, unde $G=(-1,1)$ și $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x,y\in G$.

a) **(2p)** Determinați elementul neutru al grupului $(G,*)$.

b) **(3p)** Demonstrați că $f:G\to(0,\infty)$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

c) **(2p)** Calculați $\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\frac{1}{6}*\ldots*\frac{1}{2026}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.
Timpul de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIȚIA A XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică: Profilul real – Științe ale naturii
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XII-a

Subiectul 1. Se consideră funcția inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+arctgx.$

a) **(2p)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) **(2p)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) **(3p)** Calculați $\int_0^{1+\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx$.

Barem:

a) **(2p)** Integrarea prin părți...**1p**

Calcul final $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$ **1p**

b) **(2p)** $F''(x)=1+\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$ **1p**

$F''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este convexă pe $\mathbb{R}$ **1p**

c) Schimbarea de variabilă $x=f(t),\ dx=\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$ **1p**

$\Rightarrow \int_0^{1+\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx=\int_0^1\left(t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt$ **1p**

Calcul final $\frac{1+\ln 2}{2}$ **1p**

Subiectul 2 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-2^{-x}.$

a) **(2p)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

b) **(2p)** Calculați $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\ln(x^2+2)}dx$.

c) **(3p)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+f\left(x^{2025}\right)\right)dx\geq\int_0^1\left(f\left(x^2\right)+f\left(x^{2026}\right)\right)dx$.

Barem:

a) **(2p)** $\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(2^{2x}-2+2^{-2x}\right)dx=\left.\left(\frac{2^{2x}}{2\ln 2}-2x-\frac{2^{-2x}}{2\ln 2}\right)\right|_0^1$ **1p**

Calcul final $\frac{15}{8\ln 2}-2$ 1p

b) Funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{f(x)}{\ln(x^2+2)}$ este o funcție impară.și continuă.................1p

deci $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\ln(x^2+2)}dx=0$ 1p

c) f este strict crescătoare pe $[0,1]$ 1p

$0\le x\le 1\Rightarrow x\ge x^2\Rightarrow f(x)\ge f(x^2)\overset{f\ cont}{\Rightarrow}\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1 f(x^2)dx$ 1p

$0\le x\le 1\Rightarrow x^{2025}\ge x^{2026}\Rightarrow f(x^{2025})\ge f(x^{2026})\overset{f\ cont}{\Rightarrow}\int_0^1 f(x^{2025})dx\ge\int_0^1 f(x^{2026})dx$ 1p

Subiectul 3 Se consideră polinomul $f=mX^3+(m+1)X^2+(1-2m)X-2$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3 și $m\in\mathbb{R}^*$.

d) **(2p)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât polinomul f să se dividă prin polinomul $g=X+1$.

e) **(2p)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=4$.

f) **(3p)** Determinați valorile lui $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care polinomul admite trei rădăcini reale distincte.

Barem:

a) **(2p)** $f(-1)=0$ 1p

$m=1$ 1p

b) **(2p)** $f(-1)=m(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)$ 1p

$m=\frac{1}{3}$ 1p

c) **(3p)** $f(1)=0\Rightarrow x_1=1$ 1p

$x_2=-2,\ x_3=-\frac{1}{m}$ 1p

$m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$ 1p

Subiectul 4 Se consideră grupul abelian $(G,*)$, unde $G=(-1,1)$ şi $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x,y\in G$

a) **(2p)** Determinați elementul neutru al grupului $(G,*)$.

b) **(3p)** Demonstrați că $f:G\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

c) **(2p)** Calculați $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{4}*\dfrac{1}{6}*...*\dfrac{1}{2026}$.

Barem:

a) **(2p)** Definiția elementului neutru **1p**

$e=0$ **1p**

b) **(3p)** $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in G$ **1p**

f bijectivă **2p**

c) **(2p)** $f\left(\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{4}*\dfrac{1}{6}*...*\dfrac{1}{2026}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot...\cdot f\left(\dfrac{1}{2026}\right)=\dfrac{1}{2027}$ **1p**

$\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{4}*\dfrac{1}{6}*...*\dfrac{1}{2026}=\dfrac{1013}{1014}$ **1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.