

# CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026

Filiera teoretică: Profil real – Științe ale naturii

CLASA A XI-A

1. Se consideră matricele  $A_a, B_a \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

a) (2p) Demonstrați că  $A_a \cdot A_b = A_{a+b}$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ .

b) (3p) Fie  $C \in M_2(\mathbb{R})$ ,

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{2026} + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot \dots \cdot B_{2026}.$$

Demonstrați că  $C$  este inversabilă și, dacă  $C^{-1} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ , arătați că  $2(mq - np) = m$ .

c) (2p) Se consideră matricea  $D \in M_2(\mathbb{R})$ ,

$$D = \sum_{k=1}^{2026} (A_a^k + B_a^k).$$

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\det(D) = 0$ , unde  $\det(D)$  reprezintă determinantul matricei  $D$ .

2. Se consideră sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 3 \end{cases}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) (4p) Demonstrați că oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , distincte două câte două, sistemul este compatibil determinat.

b) (3p) Pentru  $a = b \neq c$ , determinați valorile numerelor reale  $a$  și  $c$  pentru care sistemul are soluția  $(x_0, y_0, z_0)$  cu  $x_0 + y_0 = 2$ .

3. Fie  $f_m : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{2x-5}$ ,  $m \neq 0$ .

a) (2p) Determinați domeniul maxim de definiție,  $D$ .

b) (2p) Pentru  $m = 2$ , aflați imaginea funcției.

c) (3p) Să se determine  $m \in \mathbb{R}^*$  astfel încât funcția  $g : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = |f_m(x)|$ , să admită exact două puncte de extrem local.

4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

a) (4p) Demonstrați că funcția  $f$  este bijectivă pe  $\mathbb{R}$  și calculați valoarea derivatei  $(f^{-1})'(0)$ .

b) (3p) Demonstrați că  $f(x) < x$ , oricare ar fi  $x \in (0; +\infty)$ .

**Notă:** *Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.*

*Timul efectiv de lucru este de 3 ore.*

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”**

**EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026**

**Filiera teoretică: Profil real – Științe ale naturii**

**CLASA A XI-A**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

1. Se consideră matricile  $A_a, B_a \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

|   |  |
|---|--|
| <p>a) <b>Demonstrați că</b> <math>A_a \cdot A_b = A_{a+b}</math>, oricare ar fi <math>a, b \in \mathbb{R}</math>.</p> $A_a A_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ $= \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{a+b} \dots\dots\dots$  | <p align="center">1p</p> <p align="center">1p</p>                          |
| <p>b) <b>Fie</b> <math>C \in M_2(\mathbb{R})</math>, <math>C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{2026} + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot \dots \cdot B_{2026}</math>.</p> <p><b>Demonstrați că</b> <math>C</math> este inversabilă și, dacă <math>C^{-1} = \begin{pmatrix} m &amp; n \\ p &amp; q \end{pmatrix}</math>, arătați că <math>2(mq - np) = m</math>.</p> $A_1 A_2 \dots A_{2026} = A_{1+2+\dots+2026} = A_{1013 \cdot 2027}, B_1 B_2 \dots B_{2026} = B_{1+2+\dots+2026} = B_{1013 \cdot 2027}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1013 \cdot 2027 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1013 \cdot 2027 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1013 \cdot 2027 \\ 1013 \cdot 2027 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ <p><math>\det(C) = 4 - (1013 \cdot 2027)^2 \neq 0</math>, deci <math>C</math> inversabilă</p> $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} 2 & -1013 \cdot 2027 \\ -1013 \cdot 2027 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ $mq - np = \det(C^{-1}) = \frac{1}{\det C}$ $2(mq - np) = \frac{2}{\det(C)} = m \dots\dots\dots$ | <p align="center">1p</p> <p align="center">1p</p> <p align="center">1p</p> |
| <p>c) <b>Se consideră matricea</b> <math>D \in M_2(\mathbb{R})</math>, <math>D = \sum_{k=1}^{2026} (A_a^k + B_a^k)</math>.</p> <p><b>Rezolvați în</b> <math>\mathbb{R}</math> <b>ecuația</b> <math>\det(D) = 0</math>, unde <math>\det(D)</math> reprezintă determinantul matricei <math>D</math>.</p> $A_a^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_a^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & 1 \end{pmatrix}$ $\sum_{k=1}^{2026} A_a^k = 1013 \begin{pmatrix} 2 & 2027a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \sum_{k=1}^{2026} B_a^k = 1013 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2027a & 2 \end{pmatrix}, D = 1013 \begin{pmatrix} 4 & 2027a \\ 2027a & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ $\det D = 1013^2 \begin{vmatrix} 4 & 2027a \\ 2027a & 4 \end{vmatrix} = 1013^2 (4 - 2027a)(4 + 2027a)$ $\det D = 0 \Leftrightarrow 1013^2 (4 - 2027a)(4 + 2027a) = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{4}{2027} \dots\dots\dots$  | <p align="center">1p</p> <p align="center">1p</p>                          |

$$2. \text{ Se consideră sistemul de ecuații } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 3 \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| <p>a) <b>Demonstrați că oricare ar fi <math>a, b, c \in \mathbb{R}</math>, distincte două câte două, sistemul este compatibil determinat.</b></p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ <p><math>\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b)</math> (Vandermonde).....</p> <p><math>a, b, c \in \mathbb{R}</math> distincte două câte două <math>\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow</math> sistemul este compatibil determinat. ....</p>  | <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| <p>b) <b>Pentru <math>a = b \neq c</math>, determinați valorile numerelor reale <math>a</math> și <math>c</math> pentru care sistemul are soluția <math>(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3</math> cu <math>x_0 + y_0 = 2</math>.</b></p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & c \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{pmatrix}, \Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = c - a \neq 0$ <p><math>\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2</math>.....</p> $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & 2 \\ a^2 & c^2 & 3 \end{pmatrix}, \det \bar{A} = (c-a)(ac - 2a - 2c + 3)$ <p><math>\det \bar{A} = 0 \Rightarrow ac - 2a - 2c + 3 = 0</math> .....</p> $x_0 = \alpha, y_0 = 1 - \alpha - \frac{2-a}{c-a}, z_0 = \frac{2-a}{c-a}$ $x_0 + y_0 = 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{2-a}{c-a} = 2 \Leftrightarrow c = 2a - 2$ <p><math>ac - 2a - 2c + 3 = 0, c = 2a - 2 \Rightarrow 2a^2 - 8a + 7 = 0 \Rightarrow a = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, c = 2 \pm \sqrt{2}</math> .....</p> | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |

3. Fie  $f_m : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{2x-5}$ ,  $m \neq 0$ .

|  |                               |
|--|-------------------------------|
| <p>a) <b>Determinați domeniul maxim de definiție, <math>D</math>.</b></p> <p><math>2x - 5 \neq 0</math> .....</p> <p><math>D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}</math> .....</p>  | <p>1p</p> <p>1p</p>           |
| <p>b) <b>Pentru <math>m = 2</math>, aflați imaginea funcției.</b></p> <p>Pentru <math>m = 2</math>, <math>f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{4(x-1)(x-4)}{(2x-5)^2}</math> .....</p> <p><math>f(1) = 0</math>, <math>f(4) = 6</math>.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} f(x) = -\infty</math>, <math>\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} f(x) = +\infty</math>.</p> <p><math>f</math> continuă pe <math>D</math>, <math>\text{Im } f = (-\infty, 0] \cup [6, \infty)</math> .....</p>  | <p>1p</p> <p>1p</p>           |
| <p>c) <b>Să se determine <math>m \in \mathbb{R}^*</math> astfel încât funcția <math>g : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>g(x) =  f_m(x) </math>, să admită exact două puncte de extrem local.</b></p> <p>Zerourile funcției: <math>mx^2 - (m+2)x + 2 = 0</math>, <math>\Delta = (m-2)^2</math>, <math>x_1 = 1</math>, <math>x_2 = \frac{2}{m}</math>, <math>m \neq 0</math>, <math>m \neq \frac{4}{5}</math> .....</p> <p><math>f'_m(x) = \frac{2mx^2 - 10mx + 5m + 6}{(2x-5)^2}</math>, <math>\Delta' = 12m(5m-4)</math></p> <p>Dacă <math>m \neq 2</math>, <math>x_1 \neq x_2</math> devin puncte de minim local pentru <math>g(x) =  f_m(x) </math></p> <p>Acestea sunt unice dacă nu există alte puncte critice: <math>\Delta' &lt; 0 \Leftrightarrow m \in \left( 0, \frac{4}{5} \right)</math></p> <p>Sau dacă punctele critice coincid cu 1 și <math>\frac{2}{m}</math>, ceea ce este imposibil pentru <math>m \neq 2</math> și <math>m \neq \frac{4}{5}</math> .....</p> <p>Dacă <math>m = 2</math>, <math>f'(x) = \frac{4(x-1)(x-4)}{(2x-5)^2}</math>, deci <math>x_1 = 1, x_2 = 4</math> puncte de extrem local ale funcției <math>g</math></p> <p><math>m \in \left( 0, \frac{4}{5} \right) \cup \{2\}</math> .....</p> | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |

4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

|   |   |
|---|---|
| <p>a) <b>Demonstrați că funcția <math>f</math> este bijectivă pe <math>\mathbb{R}</math> și calculați valoarea derivatei <math>(f^{-1})'(0)</math>.</b></p> <p><math>f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} &gt; 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f</math> strict crescătoare pe <math>\mathbb{R}</math>, deci <math>f</math> injectivă pe <math>\mathbb{R}</math> .....</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty</math></p> <p><math>x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty</math></p> <p><math>f</math> continuă pe <math>\mathbb{R}</math>, deci <math>\text{Im } f = \mathbb{R} \Rightarrow f</math> surjectivă pe <math>\mathbb{R}</math></p> <p>Așadar, <math>f</math> bijectivă pe <math>\mathbb{R}</math> .....</p> <p><math>f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0</math>.</p> <p><math>(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}</math> .....</p> <p><math>f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(0) = 1</math>, deci <math>(f^{-1})'(0) = 1</math> .....</p> | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |
| <p>b) <b>Demonstrați că <math>f(x) &lt; x</math>, oricare ar fi <math>x \in (0; +\infty)</math>.</b></p> <p><math>h : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) - x</math></p> <p><math>h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1, \sqrt{x^2 + 1} &gt; 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} &lt; 1 \Rightarrow h'(x) &lt; 0, \forall x &gt; 0</math> .....</p> <p><math>h</math> strict descrescătoare pe <math>(0; +\infty)</math> .....</p> <p><math>h(0) = 0 \Rightarrow h(x) &lt; 0, \forall x &gt; 0 \Rightarrow f(x) &lt; x, \forall x &gt; 0</math> .....</p>  | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>           |