CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică: Profil real - Științe ale naturii
CLASA a X-a

1. a) (2p) Rezolvați ecuația $\left\{\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x}\right\}=\frac{15}{19}$, $x\in\mathbb{N}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a.

b) (3p) Rezolvați ecuația $x^{\log_3(x-1)}+2\cdot(x-1)^{\log_3 x}=3x^2$.

c) (2p) Rezolvați ecuația $4^{\sin^2 x}+2^{\operatorname{tg}x-1}=3$, $x\in\left(2k\pi,\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{N}$.

2. a) (3p) Determinați cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\sqrt{2}+3\right)^{100}$.

b) (4p) Calculați: $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+k+1}{k+1}C_n^k$

3. a) (4p) Se consideră ecuația $az^2+bz+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{C}^*$, $|a|=|b|=|c|$. Arătați că, dacă ecuația are cel puțin o soluție de modul 1, atunci $b^2=ac$.

b) (3p) Fie $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $|\alpha|>|\beta|$. Arătați că, dacă $z\in\mathbb{C}$, $|z|\leq 1$, atunci $\left|\frac{\alpha z-\beta}{\alpha+i\beta z}\right|\leq 1$.

4. Se consideră punctele $A_n(0,n)$, $B_n(1,n)$, $C_n(2,n)$, $D_n(3,n)$, unde $n\in\{1,2,3,4\}$, și mulțimea $M=\{A_i,B_i,\ i\in\{1,2,3,4\}\}$.

a) (2p) Determinați coordonatele simetricului punctului A_2 față de centrul de greutate al triunghiului $\Delta B_3C_1D_4$.

b) (2p) Arătați că, dacă avem 10 puncte în interiorul sau pe frontiera patrulaterului $A_1A_4D_4D_1$, atunci există două puncte dintre acestea care au distanța dintre ele mai mică sau egală cu $\sqrt{2}$.

c) (3p) Aflați numărul triunghiurilor determinate de punctele mulțimii M.

Notă: ***Toate subiectele sunt obligatorii.***
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică: Profil real - Științe ale naturii
CLASA a X-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. ***a) (2p) Rezolvați ecuația:*** $\left\{\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x}\right\}=\frac{15}{19},\ x\in\mathbb{N}$.

b) (3p) Rezolvați ecuația: $x^{\log_3(x-1)}+2(x-1)^{\log_3 x}=3x^2$.

c) (2p) Rezolvați ecuația: $4^{\sin^2 x}+2^{\mathrm{tg}x-1}=3,\ x\in\left(2k\pi,\frac{(4k+1)\pi}{2}\right),k\in\mathbb{N}$.

a)	Din $x\in\mathbb{N}$ și $x\le\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x}<x+1\Rightarrow$ $\left[\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x}\right]=x$. Folosind relația $x=[x]+\{x\}$, ecuația devine:	**1p**
	$\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x}-x=\frac{15}{19}\Rightarrow$ $x^2+\frac{4}{3}x=x^2+\frac{30}{19}x+\left(\frac{15}{19}\right)^2\Rightarrow x\notin\mathbb{N}\Rightarrow S=\emptyset$	**1p**
b)	Domeniu: $x>1$. Se folosește egalitatea $x^{\log_3(x-1)}=(x-1)^{\log_3 x}$.	**1p**
	Ecuația devine $3x^{\log_3(x-1)}=3x^2$, deci $x^{\log_3(x-1)}=x^2$.	**1p**
	Cum $x>1,\Rightarrow\log_3(x-1)=2\Rightarrow x=10$.	**1p**
c)	Se notează $A=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left(2k\pi,\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$. Fie funcțiile $f,g,h,i:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2 x,\ g(x)=\mathrm{tg}x-1, h(x)=4^x,\ i(x)=2^x$, funcții strict crescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, de unde $t:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, t(x)=(h\circ f)(x)+(i\circ g)(x)$ este strict crescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci t este injectivă, de unde ecuația $t(x)=3$ are cel mult o soluție pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.	**1p**
	Observăm că $x=\frac{\pi}{4}$ este soluție, deoarece $\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2},\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$, și $4^{\sin^2\frac{\pi}{4}}+2^{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-1}=4^{\frac{1}{2}}+2^0=2+1=3$. Funcția $t:A\to\mathbb{R}$ este periodică, de perioadă $2k\pi,k\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $S=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\mid k\in\mathbb{N}\right\}$.	**1p**

2.*a) (3p) Determinați cel mai mare termen al dezvoltării:* $\left(\sqrt{2}+3\right)^{100}$

b) (4p) Calculați suma: $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+k+1}{k+1}C_n^k$

a)	Termenul general: $T_{k+1}=C_{100}^k\left(\sqrt{2}\right)^{100-k}3^k$.	**1p**
	$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{101-k}{k}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}>1\Rightarrow k(3+\sqrt{2})<303 == k<71{,}97$, $k\in\mathbb{N}\Rightarrow k\le 71$ de unde termenul maxim este $T_{72}=C_{100}^{71}\left(\sqrt{2}\right)^{29}3^{71}$.	**2p**

b)	Din $\frac{k^2+k+1}{k+1} = k + \frac{1}{k+1}$ și relația $k\ C_n^k =$ n C_{n-1}^{k-1} obținem:	**1p**
	$\sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k = n2^{n-1}$ și $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.	**2p**
	$S = n2^{n-1} + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.	**1p**

3. ***a) (4p) Fie ecuația*** $az^2 + bz + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{C}^*,\ |a| = |b| = |c|$**.**
Arătați că, dacă ecuația are cel puțin o soluție de modul 1, atunci $b^2 = ac$.

b) (3p) Fie $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R},\ |\boldsymbol{\alpha}| > |\boldsymbol{\beta}|$**.** Arătați că, dacă $z \in \mathbb{C},\ |z| \le 1$, atunci $\left|\frac{\alpha z-\beta}{\alpha+i\beta z}\right| \le 1$.

a)	Considerăm $\lvert z_1 \rvert = 1 \Rightarrow \lvert z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert = \lvert z_1 z_2 \rvert = 1$ din $\lvert z_1 z_2 \rvert = \left\lvert \frac{c}{a} \right\rvert = 1$, și $\lvert z_1 + z_2 \rvert = \left\lvert \frac{-b}{a} \right\rvert = 1$	**2p**
	$\lvert z_1 + z_2 \rvert^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \lvert z_1 \rvert^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + \lvert z_2 \rvert^2 \Rightarrow$ $1 = \lvert z_1 \rvert^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + \lvert z_2 \rvert^2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = -1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -1 \Leftrightarrow$ ${z_1}^2 + {z_2}^2 + z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow (\frac{-b}{a})^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow b^2 = ac$	**2p**
b)	Presupunem, prin reducere la absurd, că $\left\lvert \frac{\alpha z-\beta}{\alpha+i\beta z} \right\rvert \ge 1 \Rightarrow$ $\lvert \alpha z - \beta \rvert \ge \lvert \alpha + i\beta z \rvert$ (1) Dar $\lvert \alpha z - \beta \rvert^2 = (\alpha z - \beta)(\alpha\bar{z} - \beta) = \alpha^2 \lvert z \rvert^2 - 2\alpha\beta\, Re(z) + \beta^2$ și $\lvert \alpha + i\beta z \rvert^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta\, Im(z) + \beta^2 \lvert z \rvert^2$	**2p**
	Relația (1) devine: $\alpha^2 \lvert z \rvert^2 - 2\alpha\beta\, Re(z) + \beta^2 \ge \alpha^2 - 2\alpha\beta\, Im(z) + \beta^2 \lvert z \rvert^2$ $\Rightarrow \lvert z \rvert^2(\alpha^2 - \beta^2) \ge \alpha^2 - \beta^2$ Cum $\alpha^2 > \beta^2$, rezultă $\lvert z \rvert \ge 1$, ceea ce contrazice ipoteza.	**1p**

4. ***Se consideră punctele*** $A_n(0,n),\ B_n(1,n),\ C_n(2,n),\ D_n(3,n)$**,** $n \in \{1,2,3,4\}$, și mulțimea $M = \{A_i, B_i,\ i \in \{1,2,3,4\}\}$.
a) (2p) Determinați coordonatele simetricului punctului A_2.
b) (2p) Demonstrați existența a două puncte la distanță cel mult $\sqrt{2}$.
c) (3p) Aflați numărul triunghiurilor determinate de punctele mulțimii M.

a)	$B_3(1,3),\ C_1(2,1),\ D_4(3,4)$. $G\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{3+1+4}{3}\right) = \left(2, \frac{8}{3}\right)$.	**1p**
	Dacă G este mijlocul segmentului A_2A_2', atunci $A_2'\left(4, \frac{10}{3}\right)$.	**1p**
b)	Se împarte patrulaterul $A_1A_4D_4D_1$ în 9 pătrate de latură 1.	**1p**
	Prin principiul cutiei, două dintre cele 10 puncte se află în același pătrat sau pe frontiera lui. Distanța dintre ele este cel mult diagonala pătratului, adică $\sqrt{2}$.	**1p**
c)	Numărul tuturor tripletelor: $C_8^3 = 56$.	**1p**
	Triplete coliniare: $2 \cdot C_4^3 = 8$.	**1p**
	Numărul triunghiurilor: $56 - 8 = 48$.	**1p**