CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Clasa a XII-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1
Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X], f = X^4 - 4X + 3, g = X^3 - 3X + 2$.
a) Descompuneți în factori ireductibili polinoamele f și g.
b) Demonstrați că dacă $a,b,c,d \in [-2,\infty]$, astfel încât $a+b+c+d=4$, atunci
$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq 4$ și $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4+2(a-1)^2+2(b-1)^2+2(c-1)^2+2(d-1)^2$.
c) Dacă $a+b+c+d=4$ și $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, demonstrați că
$a^6+b^6+c^6+d^6 \geq 4+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2$.
Soluţie
a) Folosim schema lui Horner sau astfel:
$$f = X^4-4X+3 = X^4-2X^2+1+2X^2-4X+2 = \left(X^2-1\right)^2+2(X-1)^2 = (X-1)^2\left((X+1)^2+2\right)$$
$$g = X^3-3X+2 = X^3-2X^2+X+2X^2-4X+2 = X(X-1)^2+2(X-1)^2 = (X-1)^2(X+2)$$

b) Vom demonstra că: $x^4-4x+3 \geq 2(x-1)^2; x^3-3x+2 \geq 0, \forall x \in [-2,\infty)$
$x^4-4x+3 = (x-1)^2[(x+1)^2+2] \geq 2(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0, \forall x \in [-2,\infty)$
Dacă adunăm inegalitățile
$a^4-4a+3 \geq 2(a-1)^2; b^4-4b+3 \geq 2(b-1)^2; c^4-4c+3 \geq 2(c-1)^2; d^4-4d+3 \geq 2(d-1)^2$,
obținem:
$a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4+2(a-1)^2+2(b-1)^2+2(c-1)^2+2(d-1)^2$. Analog se obține
$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq 4$

c) Rezolvarea de la punctele precedente ne sugerează să considerăm polinomul
$h = X^6-6X+5$. Folosind schema lui Horner, obținem

	X^6 1	X^5 0	X^4 0	X^3 0	X^2 0	X^1 -6	X^0 5
1	1	1	1	1	1	-5	0
1	1	2	3	4	5	0	

$\Rightarrow h = (X-1)^2\left(X^4+2X^3+3X^2+4X+5\right)$. Observăm că
$$h_1(x) = x^4+2x^3+3x^2+4x+5 = x^4+2x^3+x^2+2x^2+4x+5 = x^2(x+1)^2+x^2+(x+2)^2+1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dacă adunăm inegalitățile
$a^6-6a+5\ge(a-1)^2; b^6-6b+5\ge(b-1)^2; c^6-6c+5\ge(c-1)^2; d^6-6d+5\ge(d-1)^2$,
obținem:
$a^6+b^6+c^6+d^6\ge 6(a+b+c+d)-20+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2=$
$6\cdot 4-20+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2=4+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2$.

Barem

a)	Scrie: $f=(X-1)^2\left((X+1)^2+2\right)$	1 p
	$g=(X-1)^2(X+2)$	1p
b)	Demonstrează că $x^4-4x+3\ge 2(x-1)^2; x^3-3x+2\ge 0, \forall x\in[-2,\infty)$	1p
	Finalizare	1p
c)	Demonstrează că $a^6+b^6+c^6+d^6\ge 4+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2$	3p

Problema 2

Fie $a\in\mathbb{R}^*$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se dă legea de compoziție asociativă "*" cu proprietatea că $x*y*z=(x-a)(y-a)(z-a)+a$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) (2p) Demonstrați că $(a+1)*(a+1)$ este element neutru al legii de compoziție.

b) (3p) Demonstrați că $(a+1)*(a+1)=(a-1)*(a-1)$.

c) (2p) Determinați toate legile de compozitie cu proprietatea din enunț.

Prof. Bursuc Ion

Soluție

a) Înlocuim $y=z=a+1$. Vom obține $x*(a+1)*(a+1)=(x-a)\cdot 1\cdot 1+a=x, \forall x\in\mathbb{R}$
Înlocuim $x=y=a+1, z=x$. Vom obține $(a+1)*(a+1)*x=1\cdot 1\cdot(x-a)+a=x, \forall x\in\mathbb{R}$.
Din relațiile de mai sus rezultă că $(a+1)*(a+1)$ este element neutru al legii de compoziție.

b) Înlocuim $y=z=a-1$. Vom obține $x*(a-1)*(a-1)=(x-a)\cdot(-1)\cdot(-1)+a=x, \forall x\in\mathbb{R}$
Înlocuim $x=y=a-1, z=x$. Vom obține
$(a-1)*(a-1)*x=(-1)\cdot(-1)\cdot(x-a)+a=x, \forall x\in\mathbb{R}$.
Din relațiile de mai sus rezultă că $(a-1)*(a-1)$ este element neutru al legii de compoziție.
Deoarece elementul neutru al unei legii de compoziție asociative este unic deducem că $(a+1)*(a+1)=(a-1)*(a-1)$.

c) Fie $e=(a+1)*(a+1)$, elementul neutru al legii de compoziție .Pe de o parte avem $e*(a+1)*e=a+1$, iar pe de altă parte avem $e*(a+1)*e=(e-a)^2+a$.Egalând cele două egalități obținem $(e-a)^2=1$, de unde $e=a+1$ sau $e=a-1$.

Dacă $e=a+1 \Rightarrow x*y=x*y*(a+1)=(x-a)(y-a)+a$

$\Rightarrow x*y=(x-a)(y-a)+a, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Dacă $e=a-1 \Rightarrow x*y=x*y*(a-1)=-(x-a)(y-a)+a$

$\Rightarrow x*y=-(x-a)(y-a)+a, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Se observă că cele două legi de compoziție găsite satisfac proprietatea din enunț

Barem

a)	$x*(a+1)*(a+1)=x, \forall x\in\mathbb{R}$	1 p
	$(a+1)*(a+1)*x=x, \forall x\in\mathbb{R}$	1p
b)	Demonstrează că $(a-1)*(a-1)$ este element neutru	2p
	Finalizare	1p
c)	Găsește $x*y=(x-a)(y-a)+a, \forall x,y\in\mathbb{R}$ și $x*y=-(x-a)(y-a)+a, \forall x,y\in\mathbb{R}$	2p

Problema 3

a) Demonstraţi inegalitatea $\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, pentru orice numere $a,b>0$.

b) Demonstraţi că $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+1}dx\le\frac{e}{2}$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx$

prof. Macovei Daniela

Soluţie

a)

Inegalitatea $\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ se rescrie astfel $\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{a+b}{2ab}\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$

b) Folosind inegalitatea de la punctul a) și proprietatea de monotonie a integralei faţă de funcţie obţinem $\int_1^e\frac{x+1}{x^2+1}dx\le\frac{1}{2}\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_1^e\frac{1}{x}dx+\int_1^e dx\right)=\frac{1}{2}\left(\ln x\Big|_1^e+x\Big|_1^e\right)=$

$\frac{1}{2}(\ln e-\ln 1+e-1)=\frac{1}{2}(1+e-1)=\frac{e}{2}$. Deducem că are loc inegalitatea $\int_1^e\frac{x+1}{x^2+1}dx\le\frac{e}{2}$.

c) Se observă că

$$0\le\frac{1}{n\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx\le\frac{1}{2n\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x^2}+1\right)dx=\frac{1}{2n\ln n}\left(\ln x\Big|_{\frac{1}{n}}^{n}-\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{n}+2x\Big|_{\frac{1}{n}}^{n}\right)=$$

$\frac{1}{2n\ln n}\left(2\ln n-\frac{1}{n}+n+2n-\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{3}{2n^2\ln n}+\frac{3}{2\ln n}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{2n^2\ln n}+\frac{3}{2\ln n}\right)=0$, Deducem că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx=0$

Barem

a)	Demonstrează că $\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	2 p
b)	Demonstrează că $\int_1^e\frac{x+1}{x^2+1}dx\le\frac{e}{2}$	2p
c)	Scrie $\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^4+1}\le\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+1$ și demonstrează că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx=0$	3p

Problema 4

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}x\left(x+1\right)^n dx=\frac{n\cdot 2^{n+1}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$.

b) Demonstrați dacă $f,g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue, atunci

$\left(\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2\left(x\right)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2\left(x\right)dx\right)$. (Inegalitatea lui Cauchy – Buniakovski - Schwartz)

c) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f(1)=f\left(0\right)=0$. Să se arate că: $\left(\int_0^1 x^{n-1}f\left(x\right)dx\right)^2\le\frac{1}{\left(n+1\right)^2\left(2n+1\right)}\cdot\int_0^1\left(f\,'(x)\right)^2dx,\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}^*$.

profesor dr. Andrei Anca

Soluție.

a) $\int_{-1}^{1}x\left(x+1\right)^n dx=\int_0^2\left(t-1\right)t^n dt=\left.\left(\frac{t^{n+2}}{n+2}-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^2=\frac{n\cdot 2^{n+1}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$.

b) $0\le\int_a^b\left(f\left(t\right)-xg\left(t\right)\right)^2dt=\int_a^b f^2\left(t\right)dt-2x\int_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)dt+x^2\int_a^b g^2\left(t\right)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta_x\le 0$.

c) Utilizând formula de integrare prin părți obținem:

$\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx=\frac{x^n}{n}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n}f\,'(x)dx=-\frac{1}{n}\int_0^1 x^n f\,'(x)dx\ \Rightarrow$

$$n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = -(n+1)\int_0^1 x^n f'(x)dx .$$

Deoarece $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = 0 \Rightarrow n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = \int_0^1 (1-(n+1)x^n)f'(x)dx$.

Utilizând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz avem:

$$n^2(n+1)^2\left(\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 (1-(n+1)x^n)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx .$$

Dar $\int_0^1 (1-(n+1)x^n)^2 dx = \frac{n^2}{2n+1}$.

Din (1) şi (2) rezultă că $\left(\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{(n+1)^2(2n+1)} \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.

a)	Arată $\int_{-1}^1 x(x+1)^n dx = \frac{n\cdot 2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$	1p
b)	Demonstrează inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz	2p
c)	$\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = \frac{x^n}{n}f(x)\Big\vert_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n}f'(x)dx = -\frac{1}{n}\int_0^1 x^n f'(x)dx \Rightarrow$ $n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = -(n+1)\int_0^1 x^n f'(x)dx$ Deoarece $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big\vert_0^1 = 0$ $\Rightarrow n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = \int_0^1 (1-(n+1)x^n)f'(x)dx$.	2p
	Utilizând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz $\Rightarrow$ $n^2(n+1)^2\left(\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 (1-(n+1)x^n)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx =$ $\frac{n^2}{2n+1}\int_0^1 (f'(x))^2 dx$, de unde rezultă concluzia	2 p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.