CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “SPIRU HARET”
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Clasa a X-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

a) Să se arate că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$.

b) Demonstrați că $|az_1+bz_2|^2 - |bz_1+az_2|^2 = (a^2-b^2)\left(|z_1|^2 - |z_2|^2\right)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluție

a) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

b) $|az_1+bz_2|^2 - |bz_1+az_2|^2 = a^2|z_1|^2 + b^2|z_2|^2 + abz_1\overline{z_2} + ab\overline{z_1}z_2 - b^2|z_1|^2 - a^2|z_2|^2 - abz_1\overline{z_2} - ab\overline{z_1}z_2 =$
$(a^2-b^2)\left(|z_1|^2 - |z_2|^2\right)$.

Barem

a)	Scrie: $\lvert z_1+z_2\rvert^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$	1 p
	Finalizare	2p
b)	Demonstrează că $\lvert az_1+bz_2\rvert^2 - \lvert bz_1+az_2\rvert^2 = a^2\lvert z_1\rvert^2 + b^2\lvert z_2\rvert^2 - b^2\lvert z_1\rvert^2 - a^2\lvert z_2\rvert^2 =$	2p
	Finalizare	2p

Problema 2

a) Fie $a, b > 0$ și numerele naturale $n > m$. Demonstrați că $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} \geq \dfrac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m}$.

b) Fie $a, b > 1$ și numărul natural n. Demonstrați că $(\log_a b)^{n+1} + (\log_b a)^{n+1} \geq (\log_a b)^n + (\log_b a)^n$.

Soluție

a)

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} \geq \frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m} \Leftrightarrow \left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)\left(a^m+b^m\right) \geq \left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)\left(a^n+b^n\right) \Leftrightarrow$$

$$a^{n+m+1} + a^{n+1}b^m + b^{n+1}a^m + b^{n+m+1} \geq a^{n+m+1} + a^{m+1}b^n + b^{m+1}a^n + b^{n+m+1} \Leftrightarrow$$

$$a^{n+1}b^m + b^{n+1}a^m - a^{m+1}b^n - b^{m+1}a^n \geq 0 \Leftrightarrow a^nb^m(a-b) + a^mb^n(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a^n}{b^n} - \frac{a^m}{b^m}\right)(a-b) \geq 0.$$

b) Pentru $m = 0$, $ab = 1 \Rightarrow \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 1$. Înlocuind a cu $\log_a b$ și b cu $\log_b a$ obținem că $(\log_a b)^{n+1} + (\log_b a)^{n+1} \geq (\log_a b)^n + (\log_b a)^n$.

Barem

a)	Scrie: $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} \geq \dfrac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m} \Leftrightarrow a^{n+1}b^m + b^{n+1}a^m - a^{m+1}b^n - b^{m+1}a^n \geq 0$	1 p
	Finalizare	2p

b)	Demonstrează că $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\geq 1$, cu $ab=1$	2p
	Finalizare	2p

Problema 3

Fie $a,b,c,d\in\mathbb{Q}^*$ astfel încât $(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)=a+b+c+d$.

a) Demonstrați că $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) Demonstrați că are loc egalitatea

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^3=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{3(a+b)}{a^2b^2}\left(1+\frac{(c+d)(a+b)}{cd}\right)+\frac{3(c+d)}{c^2d^2}\left(1+\frac{(a+b)(c+d)}{ab}\right)$$

c) Demonstrați că $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}+\dfrac{1}{d^3}}\in\mathbb{Q}$.

Ion Bursuc, profesor, Suceava

Soluție:

a) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) și c)

Notăm $\sum ab=S_2,\sum a=S_1$.

Deoarece $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)^3=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^3+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)=$

$$=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+3\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3\frac{1}{cd}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+\frac{3(a+b)(c+d)}{abcd}\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{c+d}{cd}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{3(a+b)}{a^2b^2}\left(1+\frac{(c+d)(a+b)}{cd}\right)+\frac{3(c+d)}{c^2d^2}\left(1+\frac{(a+b)(c+d)}{ab}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{3(a+b)(cd+(c+d)(a+b))}{a^2b^2cd}+\frac{3(c+d)(ab+(a+b)(c+d))}{c^2d^2ab}=$$

$$=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}-\frac{3(a+b)}{abcd}+\frac{3(a+b)S_2}{a^2b^2cd}-\frac{3(c+d)}{abcd}+\frac{3(c+d)S_2}{c^2d^2ab}=$$

$$=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}-\frac{3S_1}{abcd}+\frac{3S_2((a+b)cd+(c+d)ab)}{a^2b^2c^2d^2}=$$

$$=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}-\frac{3}{abcd}\left(S_1-S_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\right)=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}=$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\in\mathbb{Q}.$$

Barem

a)	Scrie: $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}$	1 p
b)	Scrie: $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)^3=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^3+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$	1p

	Demonstrează că $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^3=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{3(a+b)}{a^2b^2}\left(1+\frac{(c+d)(a+b)}{cd}\right)+\frac{3(c+d)}{c^2d^2}\left(1+\frac{(a+b)(c+d)}{ab}\right.$	2p
c)	Demonstrează că $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^3=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}$	2p
	Finalizare	1p

Problema 4

a)Fie $a,b\in[0,1]$. Demonstrați că $\sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)}\le 1$.

b) Fie $a,b,c\in[0,1]$. Demonstrați că $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\le 1$.

Generalizare.

c) Fie $a_1,a_2,...,a_n\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Demonstrați că

$$\sqrt{a_1a_2...a_n}+\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\le 1.$$

(Andrei Anca)

Soluție. a) Fie $a=\sin^2\alpha$ și $b=\sin^2\beta$, $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Inegalitatea se rescrie în forma $\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta\le 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)\le 1$, care este adevărată.

b) Folosind a) rezultă că $\sqrt{a(bc)}+\sqrt{(1-a)(1-bc)}\le 1$.

Deoarece $\sqrt{(1-b)(1-c)}\le\sqrt{1-bc} \Leftrightarrow b(1-c)+c(1-b)\ge 0$, care este adevărată, rezultă că $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-bc)}\le 1$.

c) Demonstrăm prin inducție după n. Pentru $n=2$, $n=3$ inegalitatea este demonstrată din a), b). Presupunem că are loc pentru n și arătăm că este adevărată și pentru $n+1$. Folosim faptul că

$\sqrt{a_1a_2...a_na_{n+1}}+\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1})}\le$

$\sqrt{a_1a_2...a_n}+\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \Leftrightarrow$

$\sqrt{a_1a_2...a_n}\left(1-\sqrt{a_{n+1}}\right)+\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)a_{n+1}}\ge 0$, care este adevărată.

Cum $\sqrt{a_1a_2...a_n}+\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\le 1 \Rightarrow$

$\sqrt{a_1a_2...a_na_{n+1}}+\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1})}\le 1$.

Barem

a) Fie $a=\sin^2\alpha$ și $b=\sin^2\beta$, $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Inegalitatea se rescrie în forma $\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta\le 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)\le 1$, care este adevărată.	2p
b) Folosind a) rezultă că $\sqrt{a(bc)}+\sqrt{(1-a)(1-bc)}\le 1$. Deoarece $\sqrt{(1-b)(1-c)}\le\sqrt{1-bc} \Leftrightarrow b(1-c)+c(1-b)\ge 0$, care este adevărată, rezultă că $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-bc)}\le 1$.	3p

c) Demonstrează prin inducție după n , inegalitatea.	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.