CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"
EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Clasa a IX-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

a) Să se arate că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}+\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$, oricare ar fi $x, y>0$.

Scriem succesiv

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}+\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$$

b) Să se arate că $\frac{b-a}{a^2+ab}+\frac{c-b}{b^2+bc}+\frac{a-c}{c^2+ac}\geq 0$, oricare ar fi $a,b,c>0$.

Gazeta Matematică, *Florin Antohe*

Deoarece $\frac{b-a}{a^2+ab}+\frac{c-b}{b^2+bc}+\frac{a-c}{c^2+ac}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b-2a}{a^2+ab}+\frac{b+c-2b}{b^2+bc}+\frac{c+a-2c}{c^2+ac}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{a+b}{a^2+ab}-\frac{2a}{a^2+ab}+\frac{b+c}{b^2+bc}-\frac{2b}{b^2+bc}+\frac{c+a}{c^2+ac}-\frac{2c}{c^2+ac}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a+b}-\frac{2}{b+c}-\frac{2}{c+a}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{4}{c+a}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{bc(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{ca(c+a)}\geq 0$ .Această inegalitate fiind adevărată, deducem că inegalitatea din enunț este adevărată.

Barem

a)	Scrie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}+\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$	1 p
	Scrie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$	2p
b)	Demonstrează că $\frac{b-a}{a^2+ab}+\frac{c-b}{b^2+bc}+\frac{a-c}{c^2+ac}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a+b}-\frac{2}{b+c}-\frac{2}{c+a}\geq 0$	2p
	Demonstrează că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a+b}-\frac{2}{b+c}-\frac{2}{c+a}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{bc(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{ca(c+a)}\geq 0$	2p

Problema 2

În triunghiul ABC avem $\frac{a^2\sin A+b^2\sin B+c^2\sin C}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}=\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

Soluție

Din teorema sinusurilor deducem că $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$. Înlocuind în egalitatea din enunț, aceasta devine:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\Leftrightarrow\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a+b+c\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\Leftrightarrow$$

$$a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\Leftrightarrow$$

$$ab\left(a-b\right)^2+bc\left(b-c\right)^2+ac\left(a-c\right)^2=0\Leftrightarrow a=b=c.$$

Deducem că triunghiul ABC este echilateral.

Barem

	Scrie $\frac{a^2\sin A+b^2\sin B+c^2\sin C}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}=\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$	3 p
	Scrie $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\Leftrightarrow ab\left(a-b\right)^2+bc\left(b-c\right)^2+ac\left(a-c\right)^2=0$	3p
	Finalizare	1p

Problema 3

Fie $k\in\mathbb{N}^*$ un număr impar și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisface inegalitatea

$f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)+f\left(xy\right)\le x^k+y^k,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $f\left(1\right)=-2$ și $f\left(-1\right)=0$.

b) Determinați funcția f .

Prof. Bursuc Ion

Soluție

a) Pentru $x=y=1\Rightarrow f^2\left(1\right)+f\left(1\right)\le 2\Rightarrow f\left(1\right)\in\left[-2,1\right]$.

Pentru $x=y=-1\Rightarrow f^2\left(-1\right)+f\left(1\right)\le -2\Rightarrow f^2\left(-1\right)+f\left(1\right)+2\le 0\Rightarrow f\left(-1\right)=0$ și $f\left(1\right)=-2$.

b) Pentru $y=-1\Rightarrow f\left(-x\right)\le x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)\le -x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Pentru $y=1\Rightarrow -2f\left(x\right)+f\left(x\right)\le x^k+1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)\ge -x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

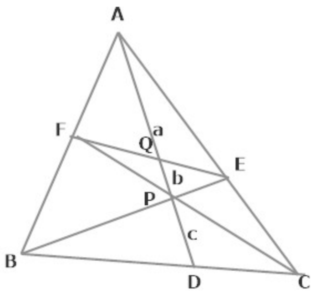
Din relațiile (1) și (2) deducem că $f\left(x\right)=-x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Barem

a)	Scrie: Pentru $x=y=1\Rightarrow f^2\left(1\right)+f\left(1\right)\le 2\Rightarrow f\left(1\right)\in\left[-2,1\right]$	1 p
	Scrie :Pentru $x=y=-1\Rightarrow f^2\left(-1\right)+f\left(1\right)\le -2\Rightarrow f^2\left(-1\right)+f\left(1\right)+2\le 0\Rightarrow f\left(-1\right)=0$ și $f\left(1\right)=-2$.	2p
b)	Demonstrează că $f\left(x\right)\le -x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}$	2p
	Demonstrează că $f\left(x\right)\ge -x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}$ și $f\left(x\right)=-x^k-1,\forall x\in\mathbb{R}$	2p

Problema 4. Fie triunghiul ABC, punctele D, E, F situate pe laturile $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ astfel încât dreptele AD, BE și CF sunt concurente în punctul P. Notăm $FE \cap AD = \{Q\}$ și $AQ = a$, $QP = b$. Arătați că $\overrightarrow{QP} = \frac{a-b}{a+b}\overrightarrow{PD}$.

(profesor dr. Andrei Anca)



Soluție. Notăm $PD = c$ și este suficient să demonstrăm că $\frac{b}{c} = \frac{a-b}{a+b}$.

Din Teorema lui Menelau aplicată triunghiului ABP și punctelor coliniare $F, Q, E \Rightarrow$

$$\frac{EP}{EB}\cdot\frac{FB}{FA}\cdot\frac{QA}{QP} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{EB}{EP}\cdot\frac{FA}{FB}. \qquad (1)$$

Teorema lui Menelau aplicată triunghiului ABD și punctelor coliniare $F, P, C \Rightarrow$

$$\frac{FA}{FB}\cdot\frac{CB}{CD}\cdot\frac{PD}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} = \frac{FB}{FA}\cdot\frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{c}{a+b+c} = \frac{FB\cdot CD}{FB\cdot CD + FA\cdot CB}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a+b+c} = \frac{EB}{EP}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{FB\cdot CD}{FB\cdot CD + FA\cdot CB} = \frac{EB}{EP}\cdot\frac{1}{\frac{FB}{FA}+\frac{CB}{CD}}. \quad (3)$

Vom demonstra $\frac{FB}{FA} + \frac{BD}{CD} = \frac{BP}{PE}$ (Van Auber).

Aplicăm Teorema lui Menelau pentru triunghiul ABE și punctele F, P, C și pentru triunghiul BEC și punctele A, P, D. Rezultă că $\frac{FB}{FA}\cdot\frac{CA}{CE}\cdot\frac{PE}{PB} = 1$ și $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{AC}{AE}\cdot\frac{PE}{PB} = 1 \Rightarrow$

$\frac{FB}{FA} = \frac{CE}{CA}\cdot\frac{PB}{PE}$ și $\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}\cdot\frac{PB}{PE}$. Prin adunarea ultimelor două relații $\Rightarrow \frac{FB}{FA} + \frac{BD}{CD} = \frac{BP}{PE}$.

Din ultima relație avem că $\frac{FB}{FA} = \frac{BP}{PE} - \frac{BD}{CD}$. Dar $\frac{CB}{CD} = 1 + \frac{BD}{CD} \Rightarrow$

$$\frac{FB}{FA} + \frac{CB}{CD} = 1 + \frac{BP}{PE} = \frac{PE+BP}{PE} = \frac{BD}{PE}. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a+b+c} = \frac{EB}{EP}\cdot\frac{PE}{BD} = 1 \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{a-b}{a+b}\overrightarrow{PD}$.

Barem

Arată că $\frac{a}{b} = \frac{EB}{EP}\cdot\frac{FA}{FB}$	1p

Demonstrează că $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a+b+c}=\frac{EB}{EP}\cdot\frac{1}{\frac{FB}{FA}+\frac{CB}{CD}}$.	2p
Arată că $\frac{FB}{FA}+\frac{BD}{CD}=\frac{BP}{PE}$ sau cunoaşte teorema lui Van Auber şi o aplică.	2p
Finalizare	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.