ONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIȚIA A XXV-A, 16 MAI 2026

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1.Se dau numerele: $a=\log_3(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2})$ și $b=\log_3(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$.

a) Calculați $a+b$;

b) Arătați că $a>0$ și $b>0$;

c) Demonstrați că $a\cdot b\le 1$.

a)	$a+b=\log_3(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$ $=\log_3(7+2)=\log_3 9=2$	1p 1p
b)	$\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}>1\Rightarrow \log_3(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2})>\log_3 1\Rightarrow a>0$ $3<\sqrt[3]{49}<4$, $-3<-\sqrt[3]{14}<-2$,$1<\sqrt[3]{4}<2$ $\Rightarrow 1<\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}<4 \quad \Rightarrow b>0$	1p 2p
c)	Se folosește inegalitatea mediilor: $\sqrt{a\cdot b}\le \dfrac{a+b}{2}\Rightarrow a\cdot b\le 1$	2p

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{n-1} n=8$, $(\forall)n\in\mathbb{N}, n\ge 3$.

b) $4^x-3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}-4\cdot 2^{2\sqrt{x}}=0$, $x\ge 0$.

c) $z+|z|=1+\sqrt{2}+i$

a)	Ecuația se poate scrie $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\cdot\dfrac{\ln 5}{\ln 4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{\ln n}{\ln(n-1)}=8$ $\Rightarrow \log_2 n=8\Rightarrow n=2^8=256$	1p 1p
b)	C.E.: $x\ge 0$. Se împarte ecuația prin $2^{2\sqrt{x}}$ și se obține $2^{2x-2\sqrt{x}}-3\cdot 2^{x-\sqrt{x}}-4=0$. Se notează $2^{x-\sqrt{x}}=t$ $(t>0)$ și se obține $t^2-3t-4=0$ cu soluția $t=4$ $\Rightarrow x-\sqrt{x}=2$ cu soluția x=4	1p 1p 1p
c)	$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=1+\sqrt{2}+i \quad\Rightarrow b=1$ $a+\sqrt{a^2+1}=1+\sqrt{2}$. Rezolvând ecuația obținem $a=1\ \Rightarrow z=1+i$	1p 1p

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to E$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$

a) Detreminați $E=\operatorname{Im} f$

b) Arătați că funcția este injectivă

c) Pentru $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to E$ determinați f^{-1} și rezolvați ecuația $f(x)+x\cdot f^{-1}(x)=0$.

a)	$E=\operatorname{Im} f=\{y\in\mathbb{R}/(\exists)x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\, a.î.\, f(x)=y\}$ $y=\dfrac{2x-1}{x-2}\Rightarrow x(y-2)=2y-1$. Pentru y=2 se obține 0=3 (F). Deci $y\neq 2$ și pentru $y\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $x=\dfrac{2y-1}{y-2}\Rightarrow E=\mathbb{R}\setminus\{2\}$	2p
b)	Studiul injectivității funcției	2p
c)	$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}=f(x)$ Ecuația devine $(1+x)\dfrac{2x-1}{x-2}=0$ cu soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=\dfrac{1}{2}$	1p 2p

4. a) Verificați că $C_{n+1}^{k+1}=\dfrac{n+1}{k+1}\cdot C_n^k$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$

b) Demonstrați că: $\dfrac{C_n^0}{1}+\dfrac{C_n^1}{2}+\dfrac{C_n^2}{3}+...+\dfrac{C_n^n}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

c) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ știind că dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^n$ are exact 10 termeni raționali.

a)	Demonstrarea identității	2p
b)	Folosind identitatea de la a) suma din membrul stâng se poate scrie $\dfrac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+...+C_{n+1}^{n+1}\right)=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$	2p
c)	Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1}=C_n^k\cdot 2^{\frac{n-k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}$ iar acest termen este rational dacă și numai dacă $\dfrac{n-k}{2}\in\mathbb{Z}$ și $\dfrac{k}{4}\in\mathbb{Z}$. Fiind 10 termeni raționali $k\in\{0,4,8,...,36\}$ și cum n este număr par $\Rightarrow n\in\{36,38\}$	2p 1p

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.