

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXV-a, 16 MAI 2026

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA, a \in R$.

a) (2p) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b), \forall a, b \in R$;

b) (2p) Aflați $m, n \in Z$ astfel încât $X(m) \cdot X(n) = X(1)$;

c) (3p) Determinați numerele reale a pentru care are loc relația

$$X(\log_{2025} a - 7) X(\log_{2026} a - 6) X(\log_{2027} a - 5) = X(-1).$$

a) $X(a)X(b) = I_2 + aA + bA + abA^2$.	1p
Cum $A^2 = A$, avem $X(a)X(b) = I_2 + aA + bA + abA = X(ab + a + b)$.	1p
b) $X(m)X(n) = X(1) \Rightarrow X(mn + m + n) = X(1) \Rightarrow mn + m + n = 1 \Rightarrow$	1p
$(m+1)(n+1) = 2 \Rightarrow (m, n) \in \{(-3, -2); (-2, -3); (0, 1); (1, 0)\}$	1p
c) $X(a)X(b)X(c) = X((a+1)(b+1)(c+1) - 1)$.	1p
$X(\log_{2025} a - 7)X(\log_{2026} a - 6)X(\log_{2027} a - 5) = X(-1) \Rightarrow$	1p
$X((\log_{2025} a - 7)(\log_{2026} a - 6)(\log_{2027} a - 5) - 1) = X(-1) \Rightarrow$	
$(\log_{2025} a - 7)(\log_{2026} a - 6)(\log_{2027} a - 5) = 0$	
$a \in \{2025^7; 2026^6; 2027^5\}$	1p

2. Fie polinomul $f = 2X^3 - aX^2 - aX + 2$, cu $a \in R$ și cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 .

a) (2p) Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$ oricare ar fi $a \in R$;

b) (2p) Să se determine numărul real a știind că polinomul are toate rădăcinile reale;

c) (3p) Să se determine numărul real a astfel încât $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$.

a) $f(-1) = 2(-1)^3 - a(-1)^2 - a(-1) + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = (x+1) \cdot$	2p
b) Din punctul a), rezultă că $x = -1$ este rădăcină a polinomului f .	1p
Celelalte două rădăcini sunt soluțiile ecuației $2x^2 - (a+2)x + 2 = 0$.	
Cum toate rădăcinile sunt reale, rezultă că $\Delta \geq 0$.	1p
$\Delta = (a+2)^2 - 16 \Rightarrow a \in (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$.	
c) Cum $x_1 = -1$ este rădăcină a polinomului, avem $ x_2 + x_3 = 2$ (1).	1p

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a}{2} \Rightarrow x_2 + x_3 = \frac{a+2}{2}$ $x_1 x_2 x_3 = -1 \Rightarrow x_2 x_3 = 1$ <p>Dacă toate rădăcinile sunt reale, adică $a \in (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$, rezultă că x_2, x_3 au același semn.</p> <p>Caz I: $x_2, x_3 > 0$. Rezultă, conform relației (1), că $x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow a = 2$</p> <p>Caz II: $x_2, x_3 < 0$. Rezultă, conform relației (1), că $x_2 + x_3 = -2 \Rightarrow a = -6$</p> <p>Dacă $a \in (-6, 2)$, atunci $x_2, x_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $x_3 = \bar{x}_2 \Rightarrow x_2 = x_3 = 1$. Cum</p> $x_{2,3} = \frac{a+2 \pm i\sqrt{-a^2-4a+12}}{4}$ verifică toate relațiile, rezultă că $a \in (-6, 2)$. <p>Deci $a \in [-6, 2]$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
---	---------------------

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

- a) (2p) Arătați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$ și care se află pe graficul funcției este paralelă cu axa OX ;
- b) (2p) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f ;
- c) (3p) Demonstrați că $\ln \frac{x-1}{y-1} \leq x - y$, oricare ar fi $x, y \in (1, 2)$ cu $x < y$.

<p>a) Avem $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$.</p> <p>Deoarece $f'(2) = 0$, rezultă că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$ și care se află pe graficul funcției este paralelă cu axa OX.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ graficul funcției nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \Rightarrow$ graficul funcției nu admite asimptotă oblică spre $+\infty$.</p> <p>$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \infty \Rightarrow x = 1$ este asimptotă verticală.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
<p>c) $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.</p> <p>$f$ este funcție descrescătoare pe $(-\infty, 2]$ și este funcție crescătoare pe $[2, \infty)$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>

<p>Cum $x, y \in (1, 2)$ cu $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow \frac{e^x}{x-1} \geq \frac{e^y}{y-1} \Rightarrow e^{x-y} \geq \frac{x-1}{y-1} \Rightarrow$ $\ln \frac{x-1}{y-1} \leq x - y.$</p>	1p
---	----

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), & x \geq 0 \\ x^3 + x, & x < 0 \end{cases}.$

- a) (2p) Arătați că funcția f admite primitive;
- b) (2p) Determinați primitiva $G : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ pentru care avem $G(-2) = 2032$;
- c) (3p) Aflați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f , axa OX și dreptele de ecuații $x = -2$ și $x = 2$.

$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^3 + x) = 0 \\ \text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln(x^2 + 1)) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ este funcție continuă în } x = 0. (1)$	1p
<p>f este funcție continuă pe $(-\infty, 0)$ (funcție de gradul 3); f este funcție continuă pe $(0, \infty)$ (componere de funcții elementare) rezultă, împreună cu relația (1), că funcția f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive.</p>	1p
<p>b) $g(x) = x^3 + x$</p> $\int g(x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow G(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + k, k \in \mathbb{R}$ $G(-2) = 6 + k \Rightarrow k = 2026 \Rightarrow G(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2026.$	1p 1p
<p>c) $A = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 x^3 + x dx + \int_0^2 \ln(x^2 + 1) dx = A_1 + A_2$</p> $A_1 = \int_{-2}^0 x^3 + x dx = \int_{-2}^0 (-x^3 - x) dx = 6$ $A_2 = \int_0^2 \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) \Big _0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = 2 \ln 5 - 2 \left(x \Big _0^2 - \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx \right) =$ $2 \ln 5 - 2(2 - \arctg 2) = 2 \ln 5 + 2 \arctg 2 - 4 \Rightarrow A = 2(\ln 5 + \arctg 2 + 1).$	1p 1p 1p