

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

Barem de corectare și notare

1. a) (2p) Demonstrați că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, pentru orice număr real x .
- b) (3p) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = 5x - 4$.
- c) (2p) Dacă n și k sunt numere naturale astfel încât $2^k \leq n < 2^{k+1}$ demonstrați că:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = n.$$

a) Dacă n este număr întreg și $n \leq x < n + \frac{1}{2}$, atunci $[x] = \left[x + \frac{1}{2}\right] = n$ și $[2x] = 2n$	1p
Dacă $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$, atunci $[x] = n$, $\left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1$ și $[2x] = 2n + 1$	1p
b) Notăm $\frac{2x-1}{3} = y$, atunci $x = \frac{3y+1}{2}$, $\frac{4x+1}{6} = y + \frac{1}{2}$	1p
Ecuația devine $[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{15y-3}{2} \rightarrow [2y] = \frac{15y-3}{2} = m \in \mathbb{Z}$, de unde $\left[\frac{4m+6}{15}\right] = m$	1p
$-\frac{9}{11} < m \leq \frac{6}{11} \rightarrow m = 0 \rightarrow y = \frac{1}{5}$ și $x = \frac{4}{5}$	1p
c) $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$	1p
$\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] = [n] - \left[\frac{n}{2}\right]$ $\left[\frac{n+2}{2^2}\right] = \left[\frac{n}{2^2} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2^2}\right]$ $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$ Însumând relațiile obținem $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = [n] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = n$	1p

2. a) (3p) Rezolvați ecuația: $\left(3x + \frac{1}{3}\right) + \left(3x + \frac{4}{3}\right) + \left(3x + \frac{7}{3}\right) + \dots + \left(3x + \frac{37}{3}\right) = 121, (3)$.
- b) (4p) Să se demonstreze că numărul $\underbrace{111 \dots 1}_{2025} \underbrace{222 \dots 2}_{2025}$ poate fi scris ca produsul a două numere naturale consecutive.

a) $\left(3x + \frac{1}{3}\right), \left(3x + \frac{4}{3}\right), \left(3x + \frac{7}{3}\right), \dots, \left(3x + \frac{37}{3}\right)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice (a_n) cu $a_1 = 3x + \frac{1}{3}$, $r = 1$, $a_n = 3x + \frac{37}{3}$ și $S_n = 121, (3)$. Se obține $n = 13$.	2p
$S_{13} = 13 \left(3x + \frac{19}{3}\right) = \frac{364}{3}$, de unde $x = 1$.	1p
b) $\underbrace{111 \dots 1}_{2025} \underbrace{222 \dots 2}_{2025} = 10^{4049} + 10^{4048} + \dots + 10^{2025} + 2 \cdot 10^{2024} + 2 \cdot 10^{2023} + \dots + 2 \cdot 10 + 2 = (10^{2025} + 2) \cdot (10^{2024} + 10^{2023} + \dots + 10 + 1)$	1p
$= (10^{2025} + 2) \cdot \frac{10^{2025}-1}{9} = \frac{10^{2025}-1}{3} \cdot \frac{10^{2025}+2}{3} = \frac{10^{2025}-1}{3} \cdot \left(\frac{10^{2025}-1}{3} + 1\right)$	2p
$\frac{10^{2025}-1}{3}$ este număr natural și $\frac{10^{2025}-1}{3}, \frac{10^{2025}-1}{3} + 1$ sunt consecutive	1p

3. Se consideră expresia $E(x) = \frac{\cos 4x + 2\cos 6x + \cos 8x}{\sin 4x + 2\sin 6x + \sin 8x}$.

a) (3p) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) (4p) Să se calculeze $E\left(\frac{5\pi}{72}\right)$.

a) $\cos 4x + 2\cos 6x + \cos 8x = 2\cos 6x \cdot (\cos 2x + 1)$	1p
$\sin 4x + 2\sin 6x + \sin 8x = 2\sin 6x \cdot (\cos 2x + 1)$	1p
$E(x) = \operatorname{ctg} 6x$	1p
b) $E\left(\frac{5\pi}{72}\right) = \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	3p
$E\left(\frac{5\pi}{72}\right) = 2 - \sqrt{3}$.	1p

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $x \cdot [2 + f(x) + f(-x)] + 2 \cdot f(-x) = 0$, pentru orice număr real x .

a) (5p) Să se demonstreze că funcția este impară.

b) (2p) Să se determine funcțiile care verifică relația de mai sus.

a) Cum $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ și scriem relația dată pentru $-x$	1p
Avem $\begin{cases} x \cdot [2 + f(x) + f(-x)] + 2 \cdot f(-x) = 0 \\ -x \cdot [2 + f(-x) + f(x)] + 2 \cdot f(x) = 0 \end{cases}$	2p
Adunând membru cu membru cele două egalități obținem: $2 \cdot f(-x) + 2 \cdot f(x) = 0$	1p
Obținem $f(-x) = -f(x)$ pentru orice număr real x , deci funcția este impară	1p
b) Cum $f(-x) = -f(x)$, din relația dată obținem $2x + 2f(-x) = 0$	1p
Finalizare, $f(x) = x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.