

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera teoretică: Profilul real – Științe ale naturii

CLASA a IX-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$ se consideră mulțimea

$$A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid (m-1)x^2 + (3m+1)x + m+2 = 0\}.$$

a) (3p) Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, mulțimea A_m are două elemente.

b) (4p) Determinați numerele reale m pentru care $A_m \subset (-\infty, 1)$.

a)	Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, A_m este mulțimea soluțiilor ecuației de gradul al doilea $(m-1)x^2 + (3m+1)x + m+2 = 0$, (1). Discriminantul ecuației (1) este $\Delta = (3m+1)^2 - 4(m-1)(m+2) = 5m^2 + 2m + 9$. Cum $\Delta = 4m^2 + (m+1)^2 + 8$, rezultă $\Delta > 0$, prin urmare ecuația (1) are două soluții reale. Deducem că mulțimea A_m are două elemente.	1p 1p 1p
b)	Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, fie x_1 și x_2 cele două soluții reale ale ecuației (1). Vom avea $A_m \subset (-\infty, 1)$ dacă și numai dacă $x_1 < 1$ și $x_2 < 1$. $\begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 < 0 \end{cases}, (2)$ Folosind relațiile lui Vietè, $x_1 + x_2 = -\frac{3m+1}{m-1}$ și $x_1 x_2 = \frac{m+2}{m-1}$, obținem succesiv: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5m+2}{m-1} > 0 \\ \frac{-5m+1}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup (1, +\infty) \\ m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup (1, +\infty).$ Deoarece pentru $m=1$ ecuația (1) devine $4x+3=0$ și are soluția $x = -\frac{3}{4}$, avem $A_1 = \left\{-\frac{3}{4}\right\} \subset (-\infty, 1), \text{ prin urmare valorile căutate sunt } m \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup [1, +\infty).$	1p 1p 1p 1p

2. a) (2p) Dați exemplu de o progresie aritmetică care conține printre termenii săi numerele reale $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$ și $\sqrt{200}$.

b) (2p) Demonstrați că numărul $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ este număr irațional.

c) (3p) Arătați că nu există nicio progresie aritmetică care conține printre termenii săi numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$.

a)	Deoarece $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ și $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = n\sqrt{2}$. Avem $a_{n+1} - a_n = (n+1)\sqrt{2} - n\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $\forall n \geq 1$, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică cu rația $\sqrt{2}$. Evident $a_1 = \sqrt{2}$, $a_3 = 3\sqrt{2}$ și $a_{10} = 10\sqrt{2}$	1p 1p
b)	Prin reducere la absurd, presupunem că $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = x \in \mathbb{Q}$. Prin ridicare la pătrat, obținem $5 - 2\sqrt{6} = x^2(7 - 2\sqrt{10})$, de unde $x^2\sqrt{10} - \sqrt{6} = \frac{7x^2 - 5}{2} = y$. Ridicând din nou la pătrat, obținem $10x^4 + 6 - 2x^2\sqrt{60} = y^2$, de unde rezultă $\sqrt{60} = \frac{10x^4 + 6 - y^2}{2x^2}$. Cum $x, y \in \mathbb{Q}$ și $x \neq 0$ deducem că $\sqrt{60} \in \mathbb{Q}$, adică numărul 60 este pătrat perfect, absurd!	1p 1p
c)	Prin reducere la absurd, presupunem că există o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu rația r care conține printre termenii săi numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$; atunci există $m, k, p \in \mathbb{N}^*$, distincte două câte două, așa încât $a_m = \sqrt{2}$, $a_k = \sqrt{3}$ și $a_p = \sqrt{5}$. Evident $r \neq 0$ (progresia nu este constantă!) și avem $\sqrt{2} = a_1 + (m-1)r$, $\sqrt{3} = a_1 + (k-1)r$ și $\sqrt{5} = a_1 + (p-1)r$. Scăzând prima egalitate din celelalte două, obținem $\sqrt{3} - \sqrt{2} = (k-m)r$ și $\sqrt{5} - \sqrt{2} = (p-m)r$, de unde rezultă că $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{k-m}{p-m} \in \mathbb{Q}$, absurd!	1p 1p 1p

3. (7p) Fie O intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$ și P un punct oarecare din plan.

Arătați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

- i) $ABCD$ este paralelogram; ii) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$.

i) $\Rightarrow$ ii)	Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci punctul O este atât mijlocul diagonalei AC , cât și mijlocul diagonalei BD . Avem $\vec{PA} + \vec{PC} = 2\vec{PO}$ și $\vec{PB} + \vec{PD} = 2\vec{PO}$, iar prin adunarea acestor relații obținem $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$.	1p 1p
ii) $\Rightarrow$ i)	Presupunem că are loc $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$, (1) și demonstrăm că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Fie M și N mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD . Rezultă $\vec{PA} + \vec{PC} = 2\vec{PM}$ și $\vec{PB} + \vec{PD} = 2\vec{PN}$. Adunând aceste relații obținem $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 2\vec{PM} + 2\vec{PN}$. Folosind (1), rezultă $4\vec{PO} = 2\vec{PM} + 2\vec{PN}$. Deducem că $\vec{PM} + \vec{PN} = 2\vec{PO}$, adică O este mijlocul segmentului MN . În particular, punctele M , N și O sunt coliniare, prin urmare avem $O, M, N \in AC \cap BD$. Așadar M , O și N coincid, adică diagonalele AC și BD au același mijloc. Rezultă că $ABCD$ este paralelogram.	1p 1p 1p 2p

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) + f([x]) = f^2(\{x\}) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Prin $\{x\}$ și $[x]$ am notat partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real x .

a) (2p) Arătați că $f(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

b) (2p) Arătați că $f(x+1) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) (3p) Determinați toate funcțiile f care au proprietatea din enunț.

a)	Făcând $x = 0$ în relația din enunț obținem $(f(0) - 1)^2 = 0$, de unde $f(0) = 1$. Cum pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $[x] = x$ și $\{x\} = 0$, relația din enunț devine $f(x) + f(x) = f^2(0) + 1$, prin urmare $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.	1p 1p
b)	Cum pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $[x] \in \mathbb{Z}$, rezultă $f([x]) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și relația din enunț devine $f(x) = f^2(\{x\})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum $\{x+1\} = \{x\}$, rezultă că $f(x+1) = f^2(\{x+1\}) = f^2(\{x\}) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$	1p 1p
c)	Conform punctului b), funcția f este periodică cu perioada 1, prin urmare este suficient să determinăm f pe intervalul $[0,1)$. Deoarece $\{x\} = x$, $\forall x \in [0,1)$, rezultă că $f(x) = f^2(x)$, $\forall x \in [0,1)$, de unde deducem că pentru orice $x \in [0,1)$ avem $f(x) = 0$ sau $f(x) = 1$. Restricția lui f la intervalul $[0,1)$ este de forma $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in [0,1) \setminus A \end{cases}$, unde A este o submulțime arbitrară a intervalului $(0,1)$.	1p 1p 1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.