

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică

Clasa a IX-a BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

a) (3p) Demonstrați că $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2$, pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$.

b) (4p) Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Demonstrați că $xy + yz + zx \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2)$.

Prof. Lavric Carmen

Soluție.

a) Folosind inegalitatea lui C.B.S în forma lui Bergstrom, adică inegalitatea

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, a, b, c \in (0, \infty), \text{ obținem:}$$

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} = \frac{(x^2)^2}{xy} + \frac{(y^2)^2}{yz} + \frac{(z^2)^2}{zx} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{xy + yz + zx} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^2} = x^2 + y^2 + z^2.$$

b) Folosim inegalitatea de la punctul precedent $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2$ și inegalitatea

asemănătoare $\frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$. Adunând cele două inegalități se obține inegalitatea

$$\frac{x^3 + y^3}{z} + \frac{y^3 + z^3}{x} + \frac{z^3 + x^3}{y} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2). \text{ Folosind condiția } x^3 + y^3 + z^3 = 3 \text{ rezultă că:}$$

$$\frac{3 - z^3}{z} + \frac{3 - x^3}{x} + \frac{3 - y^3}{y} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2), \text{ adică } \frac{3}{z} + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2), \text{ de unde se obține}$$

inegalitatea din enunțul problemei $xy + yz + zx \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2)$.

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2$	3 p
b)	Demonstrează că $\frac{x^3 + y^3}{z} + \frac{y^3 + z^3}{x} + \frac{z^3 + x^3}{y} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$	2p
	Finalizare	2p

Problema 2.

a) (3p) Fie $a, b, c, x, y, z > 0$ cu x, y, z în progresie aritmetică. Dacă za^2, yb^2, xc^2 sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{c+a}, \frac{z}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică.

b) (4p) Dacă $a, b, c, x, y, z > 0, a \neq c$ și za^2, yb^2, xc^2 cât și $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{c+a}, \frac{z}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele x, y, z sunt în progresie aritmetică.

Prof. Bursuc Ion

Soluție.

Numerele $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{c+a}, \frac{z}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică, dacă și numai dacă

$$\frac{2y}{c+a} = \frac{x}{a+b} + \frac{z}{b+c} \Leftrightarrow \frac{x}{c+a} - \frac{x}{a+b} = \frac{z}{b+c} - \frac{z}{c+a} \Leftrightarrow \frac{x(b-c)}{(c+a)(a+b)} = \frac{z(a-b)}{(b+c)(c+a)} \Leftrightarrow$$

$$x(b^2 - c^2) = z(a^2 - b^2) \Leftrightarrow (x+z)b^2 = za^2 + xc^2 \Leftrightarrow za^2, yb^2, xc^2 \text{ sunt în progresie aritmetică.}$$

b) Deoarece za^2, yb^2, xc^2 cât și $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{c+a}, \frac{z}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică, atunci

$$\Rightarrow \begin{cases} 2yb^2 = za^2 + xc^2 \\ \frac{2y}{c+a} = \frac{x}{a+b} + \frac{z}{b+c} \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul de mai sus, obținem: $x = \frac{\frac{2yb^2}{b+c} - \frac{2ya^2}{c+a}}{\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}}$ (1) și $z = \frac{2y\left(\frac{c^2}{c+a} - \frac{b^2}{a+b}\right)}{\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}}$ (2).

Observăm că $\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b} \neq 0 \Leftrightarrow c^2(a+b) \neq a^2(b+c) \Leftrightarrow c^2a + c^2b - a^2b - a^2c \neq 0 \Leftrightarrow$

$ca(c-a) + b(c^2 - a^2) \neq 0 \Leftrightarrow (c-a)(ab + bc + ca) \neq 0$ care este o relație adevărată.

Din relațiile (1) și (2), prin calcul, obținem:

$$x+z = \frac{2y\left(\frac{b^2}{b+c} - \frac{a^2}{c+a} + \frac{c^2}{c+a} - \frac{b^2}{a+b}\right)}{\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}} = \frac{2y\left(\frac{b^2-c^2}{b+c} + \frac{c^2-a^2}{c+a} + \frac{a^2-b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}\right)}{\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}} =$$

$$\frac{2y\left(b-c+c-a+a-b+\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}\right)}{\frac{c^2}{b+c} - \frac{a^2}{a+b}} = 2y \Rightarrow x+z = 2y \Rightarrow \text{că numerele } x, y, z \text{ sunt în progresie}$$

aritmetică.

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{c+a}, \frac{z}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică	3 p
b)	Rezolva sistemul $\begin{cases} 2yb^2 = za^2 + xc^2 \\ \frac{2y}{c+a} = \frac{x}{a+b} + \frac{z}{b+c} \end{cases}$	2p
	Finalizare	2p

Problema 3.

a) (3p) Demonstrați că $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$, pentru orice numere reale a, b, c, x, y, z .

b) (4p) Dacă A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi nedreptunghic și

$(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)^2 - 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \geq 0$, atunci triunghiul este echilateral.

Prof. Macovei Monica

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + \\ & c^2y^2 + c^2z^2 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 - 2abxy - 2bcyz - 2cazx = a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 - \\ & - 2abxy - 2bcyz - 2cazx = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Folosind egalitatea de mai sus obținem } (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2,$$

$\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ cu egalitate pentru $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Folosind această inegalitate obținem

$$(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \geq$$

$$(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C)^2 \quad (1)$$

$$\text{Dar } (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)^2 - 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C)^2 \geq$$

$$(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) =$$

$$= (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C)^2 \Rightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C, A, B, C \in (0, \pi) - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ de unde deducem că } A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ sau}$$

$$A, B, C \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right).$$

$$\text{Dacă } A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ atunci cum funcția tangentă este strict crescătoare pe } \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow A = B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ echilateral}$$

$$\text{Dacă } A, B, C \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \text{ atunci cum } A + B + C = \pi, \text{ deducem că în acest caz se ajunge la}$$

contradicție.

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$, pentru orice numere reale a, b, c, x, y, z .	3 p
b)	Demonstrează că $(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C)^2 \Rightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C}$	3p
	Finalizare	1p

Problema 4.

a) (3p) Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și punctele $M \in (AD), N \in (BC)$ astfel încât

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MD} \text{ și } \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{NC}, k > 0. \text{ Demonstrați că } \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}}{1+k}.$$

b) (4p) Se consideră hexagonul convex $ABCDEF$ și punctele

$$P \in (AF), Q \in (BC), R \in (CD), S \in (EF) \text{ astfel încât } \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QC},$$

$$\overrightarrow{DR} = k\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{ES} = k\overrightarrow{SF}. \text{ Demonstrați că patrulaterul } SRQP \text{ este paralelogram dacă și numai dacă patrulaterul } ABDE \text{ este paralelogram.}$$

Soluție.

a) Folosind regula poligonului obținem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$ și $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$. Înmulțind prima relație cu k , prin adunare obținem.

$$(1+k)\overrightarrow{MN} = (k\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}) + k\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + (k\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}) = \vec{O} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC} + \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}}{1+k} \quad (1)$$

$$\text{b) Folosind relația de la punctul precedent obținem } \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{FC}}{1+k} \quad (2) \text{ și } \overrightarrow{SR} = \frac{\overrightarrow{ED} + k\overrightarrow{FC}}{1+k} \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) deducem că $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, adică patrulaterul $SRQP$ este paralelogram dacă și numai dacă patrulaterul $ABDE$ este paralelogram.

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}}{1+k}$	3 p
b)	Scrie relațiile $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{FC}}{1+k}$ și $\overrightarrow{SR} = \frac{\overrightarrow{ED} + k\overrightarrow{FC}}{1+k}$	2p
	Finalizare	2p

Notă. Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.