

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDITIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera tehnologică: profilurile servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII a

Barem de corectare și notare

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ unde x este un număr real.

a) (2p) Calculați $\det(A(2) \cdot A(-2))$.

b) (2p) Aflați numărul natural x pentru care $\det(I_3 + A(x) + A^2(x)) \leq 4$.

c) (3p) Determinați valorile parametrului real x pentru care matricea

$B = A^n(x) + A^{n+1}(x) + A^{n+2}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este inversabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a)	$\det(A(2) \cdot A(-2)) = \det A(2) \cdot \det A(-2) =$ $= 2 \cdot (-2) = -4$	1p 1p
b)	$I_3 + A(x) + A^2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(I_3 + A(x) + A^2(x)) = (x - 1)^2$ $(x - 1)^2 \leq 4$ și x număr natural $\Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$	1p 1p
c)	$B = A^n(x)[I_3 + A(x) + A^2(x)]$ $\det B = \det A^n(x) \cdot \det[I_3 + A(x) + A^2(x)] = x^n(x - 1)^2$ Matricea B este inversabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ dacă $x^n(x - 1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	1p 1p 1p

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 5xy + 2x + 2y + \frac{2}{5}.$$

a) (2p) Demonstrați că $x \circ y = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(y + \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5}$, pentru orice numere reale x și y .

b) (3p) Determinați numărul real x pentru care $x \circ x \circ x = -\frac{1}{5}$.

c) (2p) Determinați numărul natural n , știind că $f(x) \circ f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y , unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ne^x - \frac{2}{5}$.

a)	$x \circ y = 5xy + 2x + 2y + \frac{2}{5} \Leftrightarrow x \circ y = 5xy + 2x + 2y + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \circ y = 5x\left(y + \frac{2}{5}\right) + 2\left(y + \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5} \Leftrightarrow x \circ y = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(y + \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5}$	1p 1p
b)	$x \circ x = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{2}{5}$, $x \circ x \circ x = 25\left(x + \frac{2}{5}\right)^3 - \frac{2}{5}$ $x \circ x \circ x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 25\left(x + \frac{2}{5}\right)^3 - \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$	1p 2p
c)	$f(x) \circ f(y) = f(x + y) \Leftrightarrow 5n^2e^{x+y} = ne^{x+y}$ pentru orice numere reale x și y	1p

	Rezultă $n = 0$ sau $n = \frac{1}{5}$. Cum n este număr natural, ne rezultă $n = 0$.	1p
--	--	----

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$.
- (2p) Determinați ecuația asimptotei graficului funcției f la $+\infty$.
 - (3p) Demonstrați că funcția f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.
 - (2p) Stabiliți dacă funcția f este surjectivă.

a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} = 1$ $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p 1p
b)	$f'(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1, x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 2x + 2 > (x + 1)^2 \Rightarrow \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < 1 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1 < 0$ $\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ deci este strict monotonă pe $\mathbb{R}$	1p 1p 1p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, f$ continuă și strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow Im_f = (1, +\infty) \Rightarrow f$ nu este surjectivă	1p 1p

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 7}$.
- (2p) Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0) = 2020$.
 - (2p) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{7}} x^3 f(x) dx$.
 - (3p) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{8}$.

a)	$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 7} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 7) + C$ Fie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 7) + c$ primitiva funcției f pentru care $F(0) = 2020$. $F(0) = 2020 \Rightarrow c = 2020 - \ln\sqrt{7} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 7) + 2020 - \ln\sqrt{7}$	1p 1p
b)	$\int_0^{\sqrt{7}} x^3 f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^4}{x^2 + 7} dx = \int_0^{\sqrt{7}} (x^2 - 7) dx + 49 \int_0^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2 + (\sqrt{7})^2} dx =$ $= \left(\frac{x^3}{3} - 7x + \frac{49}{\sqrt{7}} \arctg \frac{x}{\sqrt{7}} \right) \Big _0^{\sqrt{7}} = -\frac{14\sqrt{7}}{3} + 7\sqrt{7} \frac{\pi}{4}$	1p 1p
c)	$f'(x) = \frac{7 - x^2}{(x^2 + 7)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0, x \in [0, 1] \Rightarrow f$ crescătoare pe $[0, 1]$ $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{8} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{8}, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$ $\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{8} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 dx = \frac{1}{8}$	1p 1p 1p