

BAREM DE CORECTARE

a)	Calcul direct	2p
b)	am demonstrat la a) că este bine definită, demonstrăm axiomele grupului: G1) înmulțirea matricelor patratice este asociativă, G2) $I_2 = A(0)$ este element neutru G3) $A(x) \in G$ este simetrizabil dacă $\exists A(x') \in G$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = I_2$ de unde se ajunge că $A(x) \cdot A(x') = A(0) \Rightarrow A(2xx' + x + x') = A(0) \Rightarrow x' = \frac{-x}{2x+1}$ (dacă prin absurd $x' = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-x}{2x+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 = 1(F)$), deci $x' \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Deci $(G, \bullet)$ este grup.	1p 1p
c)	Deoarece $f(x) f(y) = A\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot A\left(\frac{y-1}{2}\right) = A\left(2 \frac{(x-1)(y-1)}{4} + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2}\right) = A\left(\frac{xy-1}{2}\right) = f(xy)$ deci f este morfism. Funcția f este injectivă: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow A\left(\frac{x-1}{2}\right) = A\left(\frac{y-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = y$, și este și surjectivă pentru că orice element din G este de forma $A(x) = f(2x+1)$, deci aparține imaginii lui f.	1p 1p 1p

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^3 + 3X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 .

- a) Determinați câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 - 3X + 2$, știind că restul împărțirii lui f la $X + 1$ este egal cu 6.
- b) Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ și demonstrați ca pentru orice număr real m polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
- c) Determinați m număr natural nenul pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 6$.

a)	$f(-1) = 6 \Rightarrow m = 1$. Pentru $m = 1$ câtul împărțirii lui f la $X^2 - 3X + 2$ este: $X^2 + 4X + 13$ și restul: $29X - 25$.	1p
b)	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{S_3}{S_4} = 2$ Dacă $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ atunci $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} \geq 0$, deci $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_2x_4} + \frac{1}{x_3x_4} \right) =$ $= \frac{2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3}{1^2} = -2 < 0$ deci f nu are toate rădăcinile reale.	1p 1p 1p
c)	$x_1^4 + mx_1^3 + 3x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$, $x_2^4 + mx_2^3 + 3x_2^2 - 2x_2 + 1 = 0$, $x_3^4 + mx_3^3 + 3x_3^2 - 2x_3 + 1 = 0$ $x_4^4 + mx_4^3 + 3x_4^2 - 2x_4 + 1 = 0$. Prin înmulțirea fiecărei relații cu $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ respectiv $\frac{1}{x_4}$ obținem $x_1^3 + mx_1^2 + 3x_1 - 2 + \frac{1}{x_1} = 0$, $x_2^3 + mx_2^2 + 3x_2 - 2 + \frac{1}{x_2} = 0$, $x_3^3 + mx_3^2 + 3x_3 - 2 + \frac{1}{x_3} = 0$, $x_4^3 + mx_4^2 + 3x_4 - 2 + \frac{1}{x_4} = 0$, prin adunarea membru cu membru obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 8 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) = 0$ $6 + m(S_1^2 - 2S_2) + 3S_1 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow 6 + m(m^2 - 6) - 3m - 8 + 2 = 0$ cu soluția naturală nenulă $m = 3$	1p 1p 1p

3. Fie $x \in (0; \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ și $I_n = \int \frac{x^n}{2x^2 - 3x + 1} dx$.

- a) Calculați $I_0 - 2I_1$.
- b) Arătați ca $2I_{n+2} - 3I_{n+1} + I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
- c) Calculați $2I_6 - I_5$.

a)	$I_0 - 2I_1 = \int \frac{1-2x}{2x^2-3x+1} dx = \int \frac{1-2x}{(x-1)(2x-1)} dx =$	1p 1p
----	--	--------------

	$-\int \frac{1}{x-1} dx = -\ln x-1 + C$	
b)	$2I_{n+2} - 3I_{n+1} + I_n = 2 \int \frac{x^{n+2}}{2x^2 - 3x + 1} dx - 3 \int \frac{x^{n+1}}{2x^2 - 3x + 1} dx + \int \frac{x^n}{2x^2 - 3x + 1} dx =$ $\int \frac{2x^{n+2} - 3x^{n+1} + x^n}{2x^2 - 3x + 1} dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \in \mathbb{N}.$	1p 1p
c)	Ținând seama de cele stabilite la b), deducem că $2I_2 - 3I_1 + I_0 = x$, $2I_3 - 3I_2 + I_1 = \frac{x^2}{2}$, $2I_4 - 3I_3 + I_2 = \frac{x^3}{3}$, $2I_5 - 3I_4 + I_3 = \frac{x^4}{4}$ și $2I_6 - 3I_5 + I_4 = \frac{x^5}{5}$. Adunând aceste relații membru cu membru, obținem că $2I_6 - I_5 - 2I_1 + I_0 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$. De la a) $I_0 - 2I_1 = -\ln x-1 + C$, atunci $2I_6 - I_5 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ln x-1 + C$.	1p 1p 1p

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 6) - \ln(x^2 + 2)$.

a) Să se arate ca au loc inegalitățile $0 < f(x) \leq \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\int x f(x) dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane limitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

a)	a) $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 6)(x^2 + 2)}$. ecuația $f'(x) = 0$ admite soluția $x=0$, care este punct de maxim. $f(0) = \ln 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și că $\text{sgn}(f'(x)) = \text{sgn}(-8x)$. Cum $f'(x) \geq 0$ pentru $\forall x \leq 0$ avem $f \nearrow$ pentru $\forall x \leq 0$ și $f'(x) \leq 0$ pentru $\forall x \geq 0$ avem $f \searrow$ pentru $\forall x \geq 0$. Deci $0 < f(x) \leq \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}$.	1p 1p
b)	$\int x f(x) dx = \int x \ln(x^2 + 6) dx - \int x \ln(x^2 + 2) dx =$ $\frac{1}{2} \int (x^2 + 6)' \ln(x^2 + 6) dx - \frac{1}{2} \int (x^2 + 2)' \ln(x^2 + 2) dx =$ $\frac{(x^2 + 6) \ln(x^2 + 6)}{2} - \frac{1}{2} \int (x^2 + 6) \frac{2x}{(x^2 + 6)} dx - \frac{(x^2 + 2) \ln(x^2 + 2)}{2} + \frac{1}{2} \int (x^2 + 2) \frac{2x}{(x^2 + 2)} dx$ $= \frac{(x^2 + 6) \ln(x^2 + 6)}{2} - \frac{(x^2 + 2) \ln(x^2 + 2)}{2} + C.$	1p 1p 1p
c)	Dacă A reprezintă aria subgraficului funcției f, avem $A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [\ln(x^2 + 6) - \ln(x^2 + 2)] dx$. Aplicăm metoda integrării prin părți și obținem: $I_1 = \int_0^1 \ln(x^2 + 6) dx = \ln 7 - 2 + 2\sqrt{6} \arctg \frac{1}{\sqrt{6}}$, și	1p

	$I_1 = \int_0^1 \ln(x^2 + 2) dx = \ln 3 - 2 + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Astfel aria este $I_1 - I_2$.	1p
--	---	-----------

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.