

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică

Clasa a XII-a BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

a) (1p) Să se găsească o primitivă a funcției f care se anulează în punctul $x = 1$.

b) (3p) Să se calculeze $\int_0^1 f^n(x) \ln(1+x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$

c) (3p) Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

(Variantă modificată, Bacalaureat 2009)

Soluție.

a) O primitivă a funcției f este $F(x) = \ln(x+1) + c$.

$$F(1) = 0 \Rightarrow c = -\ln 2 \Rightarrow F(x) = \ln(x+1) - \ln 2 = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{b) Dacă } n=1 &\Rightarrow \int_0^1 f(x) \ln(1+x) dx = \frac{\ln^2(1+x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{\ln^2 2}{2}. \text{ Dacă } n \geq 2 \Rightarrow \int_0^1 f^n(x) \ln(1+x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} \ln(1+x) dx = -\frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx \right] = \frac{2^{n-1} - (n-1) \ln 2 - 1}{(n-1)^2 \cdot 2^{n-1}}. \end{aligned}$$

c) Folosind formula de medie pe intervalele $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = \overline{0, n-1}$, deducem că există

$$c_k \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \text{ cu } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \frac{1}{n} f(c_k).$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x) dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(x) dx = \frac{1}{n} (f(c_0) + f(c_1) + \dots + f(c_{n-1})), \text{ cu}$$

$$c_k \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]. \text{ Deoarece } f \text{ este descrescătoare } \Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(c_k) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq f(c_0) + f(c_1) + \dots + f(c_{n-1}) = n \int_0^1 f(x) dx = n \ln 2.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $F(x) = \ln(x+1) - \ln 2 = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$	1 p
----	---	-----

b)	Demonstrează că $\int_0^1 f(x) \ln(1+x) dx = \frac{\ln^2 2}{2}$	1p
	Demonstrează că $\int_0^1 f^n(x) \ln(1+x) dx = \frac{2^{n-1} - (n-1) \ln 2 - 1}{(n-1)^2 \cdot 2^{n-1}}, n \geq 2$	2p
c)	Demonstrează că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} (f(c_0) + f(c_1) + \dots + f(c_{n-1}))$	2p
	Finalizare	1p

Problema 2.

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se cere

a) (2p) Arătați că $(m^2 - n^2) \circ (2mn) = m^2 + n^2, \forall m, n \in \mathbb{R}$

b) (3p) Arătați că legea de compoziție este asociativă și $x \circ y \circ z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) (2p) Demonstrați că $(m^2 - n^2) \circ (2mn) \circ (2m^2 - 2p^2) \in \mathbb{Q}, \forall m, n \in \mathbb{Q}, p = \frac{m^2 + n^2}{4m}, m \neq 0$.

Soluție

a) Prin calcul direct, obținem:

$$(m^2 - n^2) \circ (2mn) = \sqrt{(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2} = \sqrt{(m^2 + n^2)^2} = m^2 + n^2, \forall m, n \in \mathbb{R}$$

b) Deoarece $x \circ (y \circ z) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2})^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ și

$$(x \circ y) \circ z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ deducem că legea de compoziție}$$

este asociativă și $x \circ y \circ z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} (m^2 - n^2) \circ (2mn) \circ (2m^2 - 2p^2) &= \sqrt{(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 + (2m^2 - 2p^2)^2} = \\ &= \sqrt{(m^2 + n^2)^2 + (2m^2 - 2p^2)^2} = \sqrt{16m^2 p^2 + 4m^4 + 4p^4 - 8m^2 p^2} = \sqrt{4(m^2 + p^2)^2} \\ &= 2(m^2 + p^2) \in \mathbb{Q}, \forall m, n \in \mathbb{Q}, p = \frac{m^2 + n^2}{4m}, m \neq 0 \end{aligned}$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $(m^2 - n^2) \circ (2mn) = m^2 + n^2, \forall m, n \in \mathbb{R}$	2 p
b)	Demonstrează că legea de compoziție este asociativă	2p
	Demonstrează că $x \circ y \circ z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$	1p
c)	Demonstrează că $(m^2 - n^2) \circ (2mn) \circ (2m^2 - 2p^2) \in \mathbb{Q}, \forall m, n \in \mathbb{Q}, p = \frac{m^2 + n^2}{4m}, m \neq 0$	2p

Problema 3. Fie polinomul $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$ cu coeficienți reali și $a_1 \geq -1$. Dacă P admite rădăcinile reale $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ atunci:

a) (2p) Demonstrați că $x_k \in [0, 1]$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;

b) (3p) Demonstrați că $P(1) \geq 1 + a_1$;

c) (2p) Demonstrați că $P(r) \geq r^n \left(1 + \frac{a_1}{r}\right)$ pentru orice număr real $r \geq 1$.

Profesor dr. Andrei Anca

Soluție. a) Din relațiile lui Viete deducem că $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1 \leq 1$, și cum rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt pozitive, rezultă că $x_k \in [0, 1]$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

b) Deoarece $P = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$ și $P(1) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)$, deducem că relația de demonstrat devine $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n$, care este adevărată, este chiar o variantă a inegalității lui Bernoulli, adică

$$(1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n) \geq 1 - b_1 - b_2 - \dots - b_n, \forall b_1, b_2, \dots, b_n \in [0, 1].$$

Această inegalitate se demonstrează ușor prin inducție matematică. Într-adevăr, dacă presupunem că afirmația este adevărată pentru n vom demonstra că ea este adevărată și pentru $n + 1$.

Din $(1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n) \geq 1 - b_1 - b_2 - \dots - b_n, \forall b_1, b_2, \dots, b_n \in [0, 1]$ rezultă că

$$(1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n)(1 - b_{n+1}) = (1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n) - (1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n)b_{n+1} \geq (1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n) - b_{n+1} \geq 1 - b_1 - b_2 - \dots - b_n - b_{n+1}, \forall b_1, b_2, \dots, b_{n+1} \in [0, 1]$$

și folosind ipoteza inductivă obținem inegalitatea dorită.

c) Folosim aceeași inegalitate de mai sus:

$$P(r) = (r - x_1)(r - x_2) \dots (r - x_n) = r^n \left(1 - \frac{x_1}{r}\right) \left(1 - \frac{x_2}{r}\right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{r}\right) \geq r^n \left(1 - \frac{x_1}{r} - \frac{x_2}{r} - \dots - \frac{x_n}{r}\right) = r^n \left(1 + \frac{a_1}{r}\right), \text{ de unde obținem că } P(r) \geq r^n \left(1 + \frac{a_1}{r}\right), \text{ pentru orice număr real } r \geq 1.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $x_k \in [0, 1]$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$	2 p
b)	Demonstrează că $P(1) \geq 1 + a_1 \Leftrightarrow (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n$	1p
	Demonstrează că $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n$	2p
c)	Demonstrează că $P(r) \geq r^n \left(1 + \frac{a_1}{r}\right)$	2p

Problema 4.

a) (2p) Demonstrați că $0 \leq \ln(1 + x) \leq x, \forall x \geq 0$.

b) (3p) Demonstrați că $\int_0^a |\ln(1 - x) \ln(1 + x)| dx \leq \frac{a^3}{3(1 - a)}, \forall a \in (0, 1)$.

c) (2p) Demonstrați că $\int_a^b \frac{|\ln(1-x)\ln(1+x)|}{x^2} dx \leq 1$, unde $a = 1 - \frac{1}{e}, b = 1 - \frac{1}{e^2}$.

Profesor Macovei Daniela

Soluție.

$$a) 0 \leq \ln(1+x) = \int_0^x (\ln(1+t))' dt = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt \leq \int_0^x 1 dt = x \Rightarrow 0 \leq \ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0.$$

$$b) \int_0^a |\ln(1-x)\ln(1+x)| dx = \int_0^a \ln \frac{1}{1-x} \ln(1+x) dx = \int_0^a \ln \left(1 + \frac{x}{1-x} \right) \ln(1+x) dx \quad (1)$$

Folosind inegalitatea de la punctul a), deducem că $0 \leq \ln(1+x) \leq x, \forall x \in [0, a]$

$$\text{și } 0 \leq \ln \left(1 + \frac{x}{1-x} \right) \leq \frac{x}{1-x}, \forall x \in [0, a] \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\int_0^a \ln \left(1 + \frac{x}{1-x} \right) \ln(1+x) dx \leq \int_0^a \frac{x}{1-x} \cdot x dx \leq \frac{1}{1-a} \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3(1-a)}, \forall a \in (0, 1).$$

$$c) \int_a^b \frac{|\ln(1-x)\ln(1+x)|}{x^2} dx = \int_a^b \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x}{1-x} \right) \ln(1+x) dx \leq \int_a^b \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{1-x} \cdot x dx =$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x} dx = \ln \frac{1-a}{1-b} = 1.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $0 \leq \ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$	2 p
b)	Demonstrează că $\int_0^a \ln(1-x)\ln(1+x) dx = \int_0^a \ln \left(1 + \frac{x}{1-x} \right) \ln(1+x) dx$	1p
	Demonstrează că $\int_0^a \ln(1-x)\ln(1+x) dx \leq \frac{a^3}{3(1-a)}, \forall a \in (0, 1)$	2p
c)	Demonstrează că $\int_a^b \frac{ \ln(1-x)\ln(1+x) }{x^2} dx \leq 1$	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.