

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 2x & -2 & -1 \\ 2x+1 & 1 & 2 \\ 2x & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & x \\ 2x & 4x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

a) (2p) Să se determine x știind că $\det({}^t A - I_3) = \det B$.

b) (2p) Considerând matricele $M = B(2)$ și $X(a) = I_2 + a \cdot M, a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $M^2 - 9 \cdot M$.

c) (3p) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 9ab), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem :

a)	$\det({}^t A - I_3) = \det B \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 & 2x \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{2} & x \\ 2x & 4x \end{vmatrix} \Rightarrow$	1
	$\Leftrightarrow 2x+1-8x+4x-2 = 2x^2-2x^2 \Leftrightarrow -2x-1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$	1
b)	$M = B(2) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, pentru care, $M^2 - 9 \cdot M = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 36 & 72 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 36 & 72 \end{pmatrix} = O_2.$	2
c)	$X(a) \cdot X(b) = (I_2 + a \cdot M)(I_2 + b \cdot M) = I_2^2 + a \cdot M \cdot I_2 + I_2 \cdot b \cdot M + ab \cdot M^2 =$ $= I_2 + a \cdot M + b \cdot M + ab \cdot 9M = I_2 + (a + b + 9ab) \cdot M = X(a + b + 9ab), \forall a, b \in \mathbb{R}.$	3

2. Fie determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix}, a, x \in \mathbb{R}.$

a) (3p) Demonstrați că $\Delta(x) = (a-1)(x^2-1)(x^2-a), (\forall) a, x \in \mathbb{R}.$

b) (4p) Determinați valorile parametrului real $a \in \mathbb{R} / \{1\}$ pentru care ecuația $\Delta(x) = 0$ admite atât rădăcini reale cât și rădăcini în $\mathbb{C} / \mathbb{R}.$

Soluție și barem :

a)	$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & a^2-1 \\ 1 & x^2-1 & x^4-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & x^2-1 & x^4-1 \end{vmatrix} =$ $= (a-1)(x^4-1) - (a^2-1)(x^2-1) = (a-1)(x^2-1)(x^2-a), (\forall) a, x \in \mathbb{R}.$	3
----	--	---

b) Deoarece $a \in \mathbb{R} / \{1\}$, rezultă că $\Delta(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - a) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x^2 - a) = 0$ cu soluțiile reale $x_{1,2} = \pm 1 \in \mathbb{R}$, iar condiția ca ecuația să admită și soluții din $\mathbb{C} / \mathbb{R}$, se impune ca acestea să fie soluțiile ecuației $x^2 - a = 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 0)$, acestea fiind de forma $x_{1,2} = \pm i\sqrt{-a} \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$.	4
---	---

3. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + m}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) (1p) Pentru $m = 1$, determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = \frac{a}{x+1} + b$, $(\forall)x \in \mathbb{R} / \{-1\}$.

b) (3p) Determinați valoarea parametrului real m , pentru care graficul funcției f admite o singură asimptotă verticală.

c) (3p) Determinați valoarea parametrului real m , pentru care ecuația $f'(x) = 0$ admite soluție unică.

Soluție și barem :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-4)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+1-5}{x+1} = 1 - \frac{5}{x+1}$, astfel că soluția problemei este $a = -5, b = 1$.	1
b) Observăm $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + m} = \frac{(x-4)(x+1)}{x^2 + 2x + m}$ și se iau în discuție cazurile : $x = 4$ rădăcină a numitorului $\Rightarrow m = -24$; $x = -1$ rădăcină a numitorului $\Rightarrow m = 1$; numitorul are rădăcină dublă $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m = 1$, astfel, soluția problemei este $m \in \{-24, 1\}$.	1 2
c) Calculăm $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + m} \right)' = \frac{5x^2 + 2x(m+4) + (8-3m)}{(x^2 + 2x + m)^2}$ și impunem ca ecuația $f'(x) = 0$ să admită soluție unică. $\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 - 5(8-3m) = 0 \Rightarrow m^2 + 23m - 24 = 0 \Leftrightarrow (m+24)(m-1) = 0$ cu soluțiile $m_1 = -24$, $m_2 = 1$. Cazul $m_2 = 1$ duce la $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$ și ecuația $f'(x) = 0$ nu oferă soluții reale. Astfel unica soluție a problemei este $m = -24$.	1 1 1

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+8}{x^2+2}$, $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$.

a) (3p) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în punctul $M(2, f(2))$ să formeze cu axa Ox un unghi cu măsura $\frac{3\pi}{4}$.

b) (4p) Determinați a și b astfel încât dreapta h având ecuația $h : 2x - 2y - 1 = 0$ să fie tangentă la graficul funcției g în punctul $P(1, g(1))$.

Soluție și barem :

a) Știm că panta tangentei la G_f este $m = f'(2)$, astfel că, din $f'(x) = \frac{-ax^2 - 16x + 2a}{(x^2 + 2)^2}$ obținem $m = -\frac{a+16}{18}$. Totodată panta tangentei la G_f este $m = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow m = -1$ și astfel $-\frac{a+16}{18} = -1 \Rightarrow a = 2$.	1 1 1
b) Deoarece $g(1) = \frac{a+b}{2}$ obținem că $P\left(1, \frac{a+b}{2}\right)$. Calculând $g'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2 + 1)^2}$ obținem ulterior $g'(1) = \frac{-2b}{4} = -\frac{b}{2}$ și cum panta tangentei la G_g este $m = g'(1) \Rightarrow m = -\frac{b}{2}$. Se formează ecuația tangentei la G_g în punctul P și obținem $y - \frac{a+b}{2} = -\frac{b}{2}(x-1)$ echivalentă cu $bx + 2y - (a + 2b) = 0$, iar identificarea acesteia cu ecuația dreptei h, duce la $a = 3, b = -2$.	1 1 1 1

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.

Subiect propus de prof. Niculina – Mihaela MOISUC