

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA A XXIV-A, 24 MAI 2025

Filiera teoretică: Profil real – Științe ale naturii

CLASA A XI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1

Fie două matrice $A, B \in M_2(R)$ cu proprietatea $AB = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) (2p) Determinați matricea B , știind că $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) (2p) Demonstrați că matricele A, B și BA sunt inversabile.
- c) (3p) Folosind eventual relația lui Cayley-Hamilton, demonstrați că $BA - (BA)^{-1} = 2025I_2$.

a) $\det A = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1 p
$B = A^{-1} \begin{pmatrix} 2024 & 2025 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2023 & 2024 \\ -2022 & -2023 \end{pmatrix}$	1 p
b) $\det(BA) = \det B \cdot \det A = \det A \cdot \det B = \det(AB) = -1 \Rightarrow$	1p
$\det A \neq 0, \det B \neq 0, \det(BA) \neq 0 \Rightarrow A, B$ și BA sunt inversabile	1p
c) Din relația lui Cayley-Hamilton avem $(AB)^2 - 2025(AB) - I_2 = O_2 \Rightarrow ABAB - 2025AB - I_2 = O_2$	1p
$BAB - 2025B - A^{-1} = O_2 \Rightarrow BA - 2025I_2 - A^{-1}B^{-1} = O_2$	1p
$BA - (BA)^{-1} = 2025I_2$	1p

Subiectul 2

Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a, b, c distincte două câte două. Fie sistemul

$$\text{de ecuații } \begin{cases} a^2x - ay + z = a^3 \\ b^2x - by + z = b^3 \\ c^2x - cy + z = c^3 \end{cases}.$$

- a) (3p) Demonstrați că sistemul este compatibil determinat.
 b) (4p) Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului, arătați că $2y_0$ reprezintă aria totală și z_0 volumul paralelipipedului.

a) Fie $A = \begin{pmatrix} a^2 & -a & 1 \\ b^2 & -b & 1 \\ c^2 & -c & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. $\det A = \begin{vmatrix} a^2 & -a & 1 \\ b^2 & -b & 1 \\ c^2 & -c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$	2 p
Deoarece a, b, c sunt distincte două câte două, $\det A \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat	1p
b) $\Delta_y = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(ac+ab+bc)$	1p
$y_0 = \frac{\Delta_y}{\det A} = ab+ac+bc \Rightarrow 2y_0 = 2(ab+ac+bc) = A_t$, unde A_t reprezintă aria totală a paralelipipedului	1p
$\Delta_z = \begin{vmatrix} a^2 & -a & a^3 \\ b^2 & -b & b^3 \\ c^2 & -c & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$	1p
$z_0 = \frac{\Delta_z}{\det A} = abc \Rightarrow z_0 = V$, unde V reprezintă volumul paralelipipedului	1p

Subiectul 3

Fie funcția continuă $f : R \rightarrow A$ cu $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ pentru orice $x \in R^*$.

- a) (4p) Calculați $f(0) + f'(0)$, unde f' reprezintă derivata de ordinul întâi a funcției f .
- b) (3p) Determinați mulțimea A , știind că funcția f este surjectivă.

a) f este funcție continuă pe $R \Rightarrow f$ este funcție continuă în $x=0$ Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = 0$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$	2 p
$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $f(0) + f'(0) = \frac{1}{2}$	2 p
b) Pentru $x \neq 0$ avem $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \Rightarrow f$ este funcție strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și este funcție strict crescătoare pe $(0, \infty)$	2p
Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, f$ funcție continuă pe $R \Rightarrow \text{Im } f = (-1, 1)$ Deoarece funcția f este surjectivă $\Rightarrow A = (-1, 1)$	1p

Subiectul 4

Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

- a) (2p) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcției f .
- b) (2p) Arătați că funcția f este strict monotonă pe R .
- c) (3p) Fie d dreapta de ecuație $y = 2x + 2025$. Demonstrați că dreapta d intersectează toate tangentele la graficul funcției.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \ln 1 = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2 p
b) $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$	1 p
f este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.	1p
c) Presupunem, prin reducere la absurd, că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta d este paralelă cu tangenta la graficul funcției în punctul $A(a, f(a))$. Notăm cu t această tangentă. Avem $m_d = m_t \Rightarrow m_t = 2 \Rightarrow f'(a) = 2$	1p
$\frac{1}{e^a + 1} = 2 \Rightarrow e^a = -\frac{1}{2}$ imposibil	1p
Deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă că dreapta d intersectează toate tangentele la graficul funcției.	1p