

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică

Clasa a XI-a BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Fie matricele pătratice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

a) (3p) Demonstrați că există un număr real c astfel încât:

$$\det(A^2 + xB^2) = x^2 (\det B)^2 + x \cdot c + (\det A)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) (4p) Demonstrați că dacă $\det(A^2 + B^2) = \det(A^2 - B^2) = 1$ atunci $|\det A + \det B| \leq \sqrt{2}$.

Profesor dr. Andrei Anca

Soluție. a) Prin calcul direct se arată că există $c_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\det(A + xB) = x^2 \det B + x \cdot c_1 + \det A, \forall x \in \mathbb{R} \text{ și } \forall A, B \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{există un număr real } c$$

$$\text{astfel încât } \det(A^2 + xB^2) = x^2 \det(B^2) + x \cdot c + \det(A^2), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{concluzia.}$$

b) Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \det(A^2 + xB^2)$ și observăm că $g(1) = g(-1) = 1$.

Prin urmare, 1 și -1 sunt rădăcini ale ecuației $g(x) - 1 = 0$. Ținând seama de faptul că

$$g(x) = x^2 (\det B)^2 + x \cdot c + (\det A)^2, \text{ avem două situații:}$$

$$1) \text{ dacă } \det B \neq 0, \text{ din relațiile lui Viète rezultă că } c = 0 \text{ și } \frac{(\det A)^2 - 1}{(\det B)^2} = -1$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 + (\det B)^2 = 1;$$

$$2) \text{ dacă } \det B = 0 \text{ rezultă că } c = 0 \text{ și } (\det A)^2 = 1 \Rightarrow (\det A)^2 + (\det B)^2 = 1.$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem că

$$(\det A + \det B)^2 \leq 2((\det A)^2 + (\det B)^2) = 2 \Rightarrow |\det A + \det B| \leq \sqrt{2}.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $\det(A + xB) = x^2 \det B + x \cdot c_1 + \det A, \forall x \in \mathbb{R}$ și $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$	2 p
	Demonstrează că $\det(A^2 + xB^2) = x^2 (\det B)^2 + x \cdot c + (\det A)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$	1p
b)	Demonstrează că $(\det A)^2 + (\det B)^2 = 1$	2p
	Demonstrează că $ \det A + \det B \leq \sqrt{2}$	2p

Problema 2. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pentru care $ABA + A - B = BA - AB$ și $A^7 = O_n$.

a) (4p) Arătați că $(AB - B + I_n)(A + I_n) = I_n$ și că B este matrice singulară.

b) (3p) Dacă $B = A^2$, arătați că $A = O_n$.

Gazeta Matematică nr 10, Petru Săveanu, Cluj-Napoca

Soluție.

Folosim următorul rezultat:

Teoremă. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $AB = I_n$, atunci A și B sunt inversabile, adică

$$AB = BA = I_n \text{ și } A = B^{-1}, B = A^{-1}.$$

a) Relația $ABA + A - B = BA - AB$ se scrie astfel:

$$ABA + A - B - BA + AB = O_n \Leftrightarrow (ABA + AB) - (B + BA) + A + I_n = I_n \Leftrightarrow$$

$$AB(A + I_n) - B(A + I_n) + (A + I_n) = I_n \Leftrightarrow (AB - B + I_n)(A + I_n) = I_n \Rightarrow (A + I_n)(AB - B + I_n) = I_n \Rightarrow$$

$$A^2B - AB + A + AB - B + I_n = I_n \Leftrightarrow A^2B + A - B = O_n \Leftrightarrow A^2B + A = B. \quad (1)$$

$$\text{Deoarece } A^7 = O_n \Rightarrow \det(A^7) = (\det A)^7 = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

$$\text{Din relația } A^2B + A = B \Rightarrow A(AB + I_n) = B \Rightarrow (\det A) \cdot \det(AB + I_n) = \det B.$$

Cum $\det A = 0 \Rightarrow \det B = 0$. Prin urmare, B este singulară.

b) Relația (1) devine

$$A^4 + A = A^2 \Rightarrow A^7 + A^4 = A^5 \Rightarrow A^4 = A^5 \Rightarrow A^6 = A^7 \Rightarrow A^6 = O_n \Rightarrow$$

$$A^6 + A^3 = A^4 \Rightarrow A^3 = A^4 \Rightarrow A^5 = A^6 \Rightarrow A^5 = O_n \Rightarrow$$

$$A^5 + A^2 = A^3 \Rightarrow A^2 = A^3 \Rightarrow A^4 = A^5 \Rightarrow A^4 = O_n \Rightarrow A = A^2 \Rightarrow A^3 = A^4 = O_n \Rightarrow$$

$$\text{Din } A = A^2 \Rightarrow A^2 = A^3 = O_n \Rightarrow A^2 = O_n \Rightarrow A = A^2 = O_n \Rightarrow A = O_n.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $(AB - B + I_n)(A + I_n) = I_n$	2p
	Demonstrează că $A^2B + A = B$ și că B este matrice singulară	2p
b)	Demonstrează că $A^6 = A^5 = A^4 = A^3 = O_n$	2p
	Demonstrează că $A^2 = A = O_n$	1p

Problema 3. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care satisface proprietatea

$$\frac{1}{x+1} < \ln f(x) - \ln x < \frac{1}{x}, \forall x \in (0, \infty). \text{ Se cere:}$$

a) (2p) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) (2p) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$.

c) (3p) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (f(x) - x - 1)$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

Profesor Bursuc Ion, Suceava

Soluție.

a) Inegalitatea $\frac{1}{x+1} < \ln f(x) - \ln x < \frac{1}{x}, \forall x \in (0, \infty)$ se rescrie $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{x}, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow$

$$e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{f(x)}{x} < e^{\frac{1}{x}}, \forall x \in (0, \infty). \text{ Deoarece } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ din criteriul „cleștelui” deducem că}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

b) Din relația $e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{f(x)}{x} < e^{\frac{1}{x}}, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow xe^{\frac{1}{x+1}} < f(x) < xe^{\frac{1}{x}}, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow$

$$x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) < f(x) - x < x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right), \forall x \in (0, \infty). \text{ Deoarece } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \ln e = 1$$

din criteriul „cleștelui” deducem că $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 1$.

c) Din relația $x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) < f(x) - x < x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right), \forall x \in (0, \infty)$ rezultă că

$$x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) - 1 \right) < x^\alpha (f(x) - x - 1) < x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 \right), \forall x \in (0, \infty). \text{ Se observă că}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^\alpha} \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1 \right) = 0 \text{ deoarece}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1 - y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y - 1 - y)'}{(y^2)'} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{2y} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Analog } \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\alpha} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 \right) = 0 \text{ deoarece}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\alpha} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{-1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x^2}} = 0. \text{ Din criteriul „cleștelui” deducem că}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (f(x) - x - 1) = 0.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{f(x)}{x} < e^{\frac{1}{x}}, \forall x \in (0, \infty)$	1p
	Demonstrează că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.	1p
b)	Demonstrează că $x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) < f(x) - x < x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right), \forall x \in (0, \infty)$	1p
	Demonstrează că $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 1$	1p
c)	Demonstrează că $x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) - 1 \right) < x^\alpha (f(x) - x - 1) < x^\alpha \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 \right), \forall x \in (0, \infty)$	1p
	Demonstrează că $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (f(x) - x - 1) = 0$	2p

Problema 4.

a) (3p) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\ln(1+e^x))$ este concavă.

b) (4p) Demonstrați că $\frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)} \geq \frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$ cu $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{a}$.

Gazeta Matematică, enunț modificat

Soluție.

a) Derivând de două ori funcția f obținem:

$$f'(x) = \left(\ln(\ln(1+e^x)) \right)' = \frac{(\ln(1+e^x))'}{\ln(1+e^x)} = \frac{e^x}{(1+e^x)\ln(1+e^x)}, \forall x > 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{(1+e^x)\ln(1+e^x)} \right)' = \frac{e^x(1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x((1+e^x)\ln(1+e^x))'}{(1+e^x)^2 \ln^2(1+e^x)} =$$

$$\frac{e^x(1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x \left(e^x \ln(1+e^x) + (1+e^x) \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \right)}{(1+e^x)^2 \ln^2(1+e^x)} = \frac{e^x \ln(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2 \ln^2(1+e^x)} \leq 0$$

deoarece $\ln(1+t) \leq t, (\forall) t \geq 0$. Din $f''(x) \leq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, rezultă f concavă.

b) Ținând seama de faptul că în condițiile problemei noastre $a, b, c \in (0, \infty)$, relația din ipoteză

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{a} \text{ este echivalentă cu } a \geq \sqrt{bc}, \text{ iar relația din concluzie } \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)} \geq \frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)} \text{ este}$$

echivalentă cu $\ln(1+b) \cdot \ln(1+c) \leq [\ln(1+a)]^2$. Deci pornind de la relația $\sqrt{bc} \leq a$ trebuie să demonstrăm relația $\ln(1+b) \cdot \ln(1+c) \leq [\ln(1+a)]^2$. (1)

Avem succesiv:

$$\sqrt{bc} \leq a \Rightarrow 1 + \sqrt{bc} \leq 1 + a \Rightarrow \ln(1 + \sqrt{bc}) \leq \ln(1 + a) \Rightarrow \ln^2(1 + \sqrt{bc}) \leq \ln^2(1 + a).$$

Deci dacă vom demonstra că $\ln(1+b) \cdot \ln(1+c) \leq [\ln(1 + \sqrt{bc})]^2$, cu atât mai mult relația (1) va fi dovedită. Pentru a arăta că $\ln(1+b) \ln(1+c) \leq \ln^2(1 + \sqrt{bc})$, vom aplica

$$\text{funcția logaritm acestei relații. Obținem: } \ln(\ln(1+b)) + \ln(\ln(1+c)) \leq 2 \ln(\ln(1 + \sqrt{bc})). \quad (2)$$

Există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $b = e^{x_1}$ și $c = e^{x_2}$. Relația (2) devine:

$$\ln(\ln(1 + e^{x_1})) + \ln(\ln(1 + e^{x_2})) \leq 2 \ln \left(\ln \left(1 + e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \right) \right). \quad (3)$$

Relația (3) devine: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Din $f''(x) \leq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, rezultă f concavă,

$$\text{deci } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează că $f''(x) = \frac{e^x \ln(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2 \ln^2(1+e^x)}, \forall x > 0$	2p
	Demonstrează că f este concavă.	1p
b)	Demonstrează că $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$	1p
	Demonstrează că $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)} \geq \frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)}, \forall a, b, c > 0 \text{ cu } \frac{a}{b} \geq \frac{c}{a}$	3p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.