

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"

EDIȚIA a XXIV -a, 24 MAI 2025

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X – a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot 2^x - (m+1) \cdot 2^{-x}$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- a) **(2p)** Pentru $m=1$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=1$.
- b) **(2p)** Pentru $m=-1$, studiați injectivitatea funcției f .
- c) **(3p)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției intersectează axa Ox .

a)	Pentru $m=1$, ecuația $f(x)=1$ este echivalentă cu ecuația $2^x - 2 \cdot 2^{-x} - 1 = 0$. Notând $2^x = t$, ecuația devine $t^2 - t - 2 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -1$ și $t_2 = 2$ $\Rightarrow x=1$.	1p 1p
b)	Pentru $m=-1$, se obține funcția $f(x) = -2^x$, care este o funcție strict descrescătoare, deci este injectivă.	2p
c)	Graficul funcției intersectează axa Ox dacă și numai dacă ecuația $f(x)=0$ are soluție. $m \cdot 2^x = (m+1) \cdot 2^{-x} \Leftrightarrow 2^{2x} = \frac{m+1}{m}$. Ecuația are soluție dacă și numai dacă $\frac{m+1}{m} > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.	1p 1p 1p

2. a) **(3p)** Demonstrați că:
 $(x-y)(\lg x - \lg y) \geq 0, \forall x, y \in (0, \infty)$.
- b) **(4p)** Demonstrați că:
 $(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$.

a)	Funcția $\lg x$ este o funcție stric crescătoare. Astfel, rezultă: - dacă $x \geq y \Rightarrow \lg x \geq \lg y \Rightarrow (x-y)(\lg x - \lg y) \geq 0$. - dacă $x \leq y \Rightarrow \lg x \leq \lg y \Rightarrow (x-y)(\lg x - \lg y) \geq 0$.	1p 1p 1p
b)	Prin logaritmare, relația de demonstrat este echivalentă cu:	

b)	$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ $S_{2025} - S_{2024} = 1 - \frac{1}{2026!} - \left(1 - \frac{1}{2025!}\right) = \frac{1}{2025!} - \frac{1}{2026!} = \frac{2025}{2026!}$	1p 2p
-----------	--	----------------------------