

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPIRU HARET”

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Profil Real – Științele Naturii

Clasa a X-a

Barem de corectare și notare

1. a) Fie expresia $E(x, y) = 4x^2 - 9x^2 + 4y^2 + 9x - 4y - 13xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că $E(x, y) = (9x - 4y)(x - y + 1)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{3^x - 1}{2^{x-2}} + \frac{2^x + 1}{3^{x-2}} = 13$.

a) $E(x, y) = 4x^2 - 9x^2 + 4y^2 + 9x - 4y - 13xy$ $= x(9x - 4y) + y(4y - 9x) + (9x - 4y)$ $= (9x - 4y)(x - y + 1)$.....2p
b) $\frac{3^x - 1}{2^{x-2}} + \frac{2^x + 1}{3^{x-2}} = 13$. Folosind notația $2^x = a$ și $3^x = b$, cu $a, b > 0 \Rightarrow \frac{4(b-1)}{a} + \frac{9(a+1)}{b} = 13$1p $\Rightarrow 9a^2 + 4b^2 + 9a - 4b - 13ab = 0$ $\Rightarrow E(a, b) = 0 \Rightarrow (9a - 4b)(a - b + 1) = 0$ $\Rightarrow$ I) $9a = 4b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9} \Rightarrow x_1 = 2$.....2p sau II) $a - b + 1 = 0 \Rightarrow a = b - 1$, deci $2^x = 3^x - 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ Deoarece funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ este strict descrescătoare $\Rightarrow$ ecuația $g(x) = 0$ are cel mult o soluție.1p Se observă $x_2 = 1$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \{1, 2\}$.....1p

2. a) Demonstrați inegalitatea: $\log_2 \frac{x+y}{2} \geq \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2}$, $\forall x, y \in (0, \infty)$;

b) Demonstrați inegalitatea: $\log_2(\log_2 3) > \log_4(\log_3 4)$;

c) Rezolvați ecuația: $\log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} \right) = \log_9 \left(\log_9 \frac{x}{3} \right)$.

a) Din inegalitatea mediilor $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ avem $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$.....1p și prin logaritmare $\Rightarrow 2 \log_2 \frac{x+y}{2} \geq \log_2 xy \Rightarrow \log_2 \frac{x+y}{2} \geq \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2}$, pentru oricare $x, y > 0$.....1p
b) Inegalitatea este echivalentă cu : $\log_2(\log_2 3) > \frac{1}{2} \log_2(\log_3 4) \Leftrightarrow \log_2(\log_2 3) > \log_2 \sqrt{\log_3 4} \Leftrightarrow$ $\log_2 3 > \sqrt{\log_3 4} \Leftrightarrow (\log_2 3)^2 > 2 \log_3 2 \Leftrightarrow (\log_2 3)^2 > \frac{2}{\log_2 3} \Leftrightarrow (\log_2 3)^3 > 2$.....2p Din subpunctul a) avem că $\log_2 \frac{4+2}{2} \geq \frac{\log_2 4 + \log_2 2}{2} \Rightarrow \log_2 3 > \frac{3}{2}$ (Fără egalitate, deoarece $2 \neq 4$) $(\log_2 3)^3 > \frac{27}{8} > 2$, ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț.....1p
c) Pentru ca ecuația să aibă sens, $x > 0, x \neq 1, \log_3 x > 0 \Rightarrow x > 1$

$\log_9 \frac{x}{3} > 0$ de unde obținem $x > 3$ $\log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} \right) = \log_3 \sqrt{\log_9 \frac{x}{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \sqrt{\log_9 \frac{x}{3}} \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x}{3}$ 1p Notând $\log_3 x = t$, vom avea ecuația $t(t-1)=2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = -1$ și $t_2 = 2$, de unde $x_1 = \frac{1}{3}$ (care nu verifică condițiile de existență) și $x_2 = 9$. Deci, soluția ecuației este $x=9$ 1p
--

3. a) Găsiți toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ având modulul egal cu 1 și care verifică egalitatea

$$\sqrt{3} z^{11} - z^{10} - 1 = 0.$$

b) Arătați că există o dreaptă pe care se plasează imaginile geometrice ale numerelor complexe z care verifică relația : $z^2 - 2iz = 1 + 2ia^2, \forall a \in \mathbb{R}$.

a) Din $\sqrt{3} z^{11} - z^{10} = 1 \Rightarrow z ^{10} \cdot \sqrt{3}z - 1 = 1$. Cum $ z = 1$, vom avea $ \sqrt{3}z - 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{3}(a + bi) - 1 = 1$, unde $z=a+bi$, cu $a,b \in \mathbb{R}$ 1p Din relațiile $a^2 + b^2 = 1$ și $(\sqrt{3}a - 1)^2 + 3b^2 = 1$ se deduce că $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $b = \pm \frac{1}{2}$ 1p Deci $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ și $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ 1p
b) Relația din enunț se rescrie : $z^2 - 2iz - 1 - 2ia^2 = 0$. Cum $(1 + i)^2 = 2i$, vom avea $(z - i)^2 - (1 + i)^2 a^2 = 0 \Rightarrow (z - i - (1 + i)a)(z - i + (1 + i)a) = 0$ 2p Rezultă soluțiile $z_1 = i + (1 + i)a = a + (1+a)i$ și $z_2 = i - (1 + i)a = -a + (1-a)i$ cu imaginile geometrice $A_1(a, 1 + a)$ și $A_2(-a, 1 - a)$, ambele puncte fiind situate pe dreapta $y=x+1$ 2p

4. a) Dacă A și B sunt două mulțimi finite disjuncte cu 8, respectiv 10 elemente, determinați în câte feluri poate fi ordonată mulțimea $A \cup B$ astfel încât primul element să fie din A , iar ultimul să fie din B ?

b) Găsiți coeficientul lui x^3 din dezvoltarea :

$$(1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \dots + (1 + x)^{n+1}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

a) Deoarece $A \cup B$ are $10+8=18$ elemente din care două sunt deja fixate la începutul și la finalul permutării, rămân astfel 16 elemente ce trebuie permutate în mijloc $\Rightarrow 16!$ feluri de scriere ordonată a acestora..... 1p Deoarece primul element trebuie să fie din A , sunt 8 moduri de alegere a acestuia iar ultimul element trebuie să fie din B , acesta putând fi ales în 10 moduri, vor rezulta în final $8 \times 16! \times 10 = 80 \cdot 16!$ Feluri de ordonare a mulțimii $A \cup B$ în condițiile cerute de problemă..... 1p
b) Coeficientul lui x^k din dezvoltarea $(1 + x)^n$ este C_n^k 1p Prin adunarea acestor coeficienți se obține $S = C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + \dots + C_{n+1}^3$ 1p Utilizând formula de recurență $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \Rightarrow C_n^k = C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$ 1p și punând pe rând $n=4,5,\dots,n+1$ și $k=3$, se obține $S = (C_5^4 - C_4^4) + (C_6^4 - C_5^4) + (C_7^4 - C_6^4) + \dots + (C_{n+2}^4 - C_{n+1}^4) = C_{n+2}^4 - C_4^4 = C_{n+2}^4 - 1$ 2p