

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET"

EDIȚIA a XXIV-a, 24 MAI 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică

Clasa a X-a BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Fie $a, b, c, x \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

a) (3p) $\frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} \geq \frac{(u+v)^2}{\alpha+\beta}, \forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in (0, \infty).$

b) (4p) $\log_x \sqrt[4]{abc} \geq \frac{1}{3\log_a x + \log_b x} + \frac{1}{3\log_b x + \log_c x} + \frac{1}{3\log_c x + \log_a x}.$

Mihai Totolici, Gazeta Matematică, nr.11, 2024, enunț modificat

Soluție.

a) $\frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} \geq \frac{(u+v)^2}{\alpha+\beta}, \forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in (0, \infty) \Leftrightarrow (\alpha u - \beta v)^2 \geq 0, \forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in (0, \infty).$

b) Din inegalitatea de la punctul a) obținem:

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{t^2}{C} + \frac{r^2}{D} \geq \frac{(u+v+t+r)^2}{A+B+C+D}, \forall u, v, t, r \in \mathbb{R}, A, B, C, D \in (0, \infty). \quad (*)$$

Folosind această inegalitate obținem

$$\frac{1}{3\log_a x + \log_b x} + \frac{1}{3\log_b x + \log_c x} + \frac{1}{3\log_c x + \log_a x} = \frac{1}{\frac{3}{\log_x a} + \frac{1}{\log_x b}} + \frac{1}{\frac{3}{\log_x b} + \frac{1}{\log_x c}} + \frac{1}{\frac{3}{\log_x c} + \frac{1}{\log_x a}} \leq$$

$$\frac{1}{\frac{(1+1+1+1)^2}{3\log_x a + \log_x b}} + \frac{1}{\frac{(1+1+1+1)^2}{3\log_x b + \log_x c}} + \frac{1}{\frac{(1+1+1+1)^2}{3\log_x c + \log_x a}} =$$

$$\frac{3\log_x a + \log_x b}{16} + \frac{3\log_x b + \log_x c}{16} + \frac{3\log_x c + \log_x a}{16} = \log_x \sqrt[4]{abc}.$$

Barem de corectare

a)	Demonstrează $\frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} \geq \frac{(u+v)^2}{\alpha+\beta}, \forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in (0, \infty) \Leftrightarrow (\alpha u - \beta v)^2 \geq 0, \forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in (0, \infty).$	3p
b)	Prelucrează și aplică inegalitatea (*) $\frac{1}{3\log_a x + \log_b x} + \frac{1}{3\log_b x + \log_c x} + \frac{1}{3\log_c x + \log_a x} =$ $\frac{1}{\frac{3}{\log_x a} + \frac{1}{\log_x b}} + \frac{1}{\frac{3}{\log_x b} + \frac{1}{\log_x c}} + \frac{1}{\frac{3}{\log_x c} + \frac{1}{\log_x a}} \leq$ $\frac{1}{\frac{(1+1+1+1)^2}{3\log_x a + \log_x b}} + \frac{1}{\frac{(1+1+1+1)^2}{3\log_x b + \log_x c}} + \frac{1}{\frac{(1+1+1+1)^2}{3\log_x c + \log_x a}} =$	2p

$\frac{3\log_x a + \log_x b}{16} + \frac{3\log_x b + \log_x c}{16} + \frac{3\log_x c + \log_x a}{16}$ $= \log_x \sqrt[4]{abc}.$	2p
---	----

Problema 2.

a) (4p) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k (x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n)} = \sqrt{n-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

b) (3p) Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{1+2^x} + \sqrt{1+2^{2x}} + \sqrt{2^x+2^{2x}} = 2^{\frac{1-x}{2}} + 2^{\frac{1+x}{2}} + 2^{\frac{1+3x}{2}}.$$

Profesor dr. Andrei Anca

Soluție. a) Folosind inegalitatea mediilor avem că

$$\sqrt{x_k (x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n)} = \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{x_k \cdot \frac{x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n}{n-1}} \leq$$

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2} \cdot \left(x_k + \frac{x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n}{n-1} \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k (x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n)} \leq$$

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \frac{(n-1)(x_1 + \dots + x_n)}{n-1} \right) = \sqrt{n-1} \cdot (x_1 + \dots + x_n).$$

Egalitatea are loc numai dacă

$$x_k = \frac{x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n}{n-1}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

b) Se înmulțește ecuația cu $\sqrt{2^{3x}}$ și se obține:

$$\sqrt{2^x (4^x + 8^x)} + \sqrt{4^x (2^x + 8^x)} + \sqrt{8^x (2^x + 4^x)} = \sqrt{2} \cdot (2^x + 4^x + 8^x) \Rightarrow 2^x = 4^x = 8^x \Rightarrow x = 0.$$

Barem de corectare

a)	Arată $\sqrt{x_k (x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n)} \leq \frac{\sqrt{n-1}}{2} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \frac{(n-1)(x_1 + \dots + x_n)}{n-1} \right)$	2p
	Arată $\frac{\sqrt{n-1}}{2} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \frac{(n-1)(x_1 + \dots + x_n)}{n-1} \right) = \sqrt{n-1} \cdot (x_1 + \dots + x_n)$	1p
	Finalizare	1p
b)	Scrie în forma echivalentă $\sqrt{2^x (4^x + 8^x)} + \sqrt{4^x (2^x + 8^x)} + \sqrt{8^x (2^x + 4^x)} = \sqrt{2} \cdot (2^x + 4^x + 8^x)$	2p
	Finalizare	1p

Problema 3. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strict crescătoare și surjectivă, iar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict crescătoare astfel încât $f \circ g = g \circ f$ și $(f \circ f \circ g \circ g)(x) = x, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

a) (3p) Demonstrați că g este inversabilă și $f \circ f = g^{-1} \circ g^{-1}$.

b) (4p) Demonstrați că $f = g^{-1}$.

Profesor Bursuc Ion

Soluție.

a) Funcția g fiind strict crescătoare este injectivă și cum este surjectivă este bijectivă. Din relația $(f \circ f \circ g \circ g)(x) = x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \circ f \circ g \circ g \circ g^{-1} = g^{-1} \Rightarrow f \circ f = g^{-1} \circ g^{-1}$.

b) Presupunem că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) \neq g^{-1}(x_0)$.

Cazul I: $f(x_0) < g^{-1}(x_0)$

Se observă că din relația $f \circ g = g \circ f$ obținem $f \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f$

Din faptul că f este strict crescătoare și $f(x_0) < g^{-1}(x_0) \Rightarrow$

$f(f(x_0)) < f(g^{-1}(x_0)) = g^{-1}(f(x_0)) \Rightarrow f(f(x_0)) < g^{-1}(f(x_0))$ și cum $f \circ f = g^{-1} \circ g^{-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow g^{-1}(g^{-1}(x_0)) < g^{-1}(f(x_0)) \Rightarrow g^{-1}(x_0) < f(x_0)$ ceea ce contrazice ipoteza.

Cazul II: $f(x_0) > g^{-1}(x_0)$.

Din f crescătoare

$\Rightarrow f(f(x_0)) > f(g^{-1}(x_0)) \Rightarrow g^{-1}(g^{-1}(x_0)) > g^{-1}(f(x_0)) \Rightarrow g^{-1}(x_0) > f(x_0)$ (contradicție).

Prin urmare, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow f = g^{-1}$.

Barem de corectare

a)	Arată că g este bijectivă	1p
	Arată că $f \circ f = g^{-1} \circ g^{-1}$	2p
b)	Presupune că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) \neq g^{-1}(x_0)$	1p
	Arată că, dacă $f(x_0) < g^{-1}(x_0)$ se ajunge la contradicție.	2p
	Arată că, dacă $f(x_0) > g^{-1}(x_0)$ se ajunge la contradicție.	1p

Problema 4. Se consideră triunghiurile echilaterale distincte și orientate pozitiv OAB, OCD, OEF, OGH . Fie M, N, Q, T mijloacele segmentelor $[BC], [ED], [FG]$ și $[HA]$. Demonstrați că $MNQT$ este paralelogram dacă și numai dacă $ACEG$ este paralelogram. (Un triunghi ABC este orientat pozitiv dacă scrierea punctelor A, B, C se face în sensul invers mișcării acelor de ceasornic).

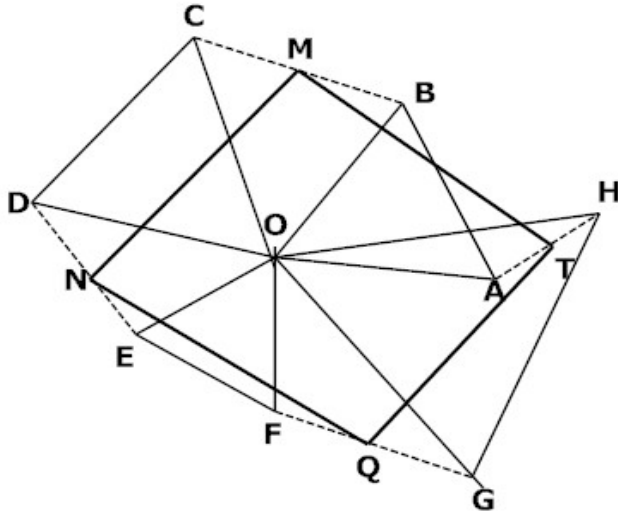
Profesor dr. Andrei Anca

Soluție. În planul complex fixăm originea în punctul O , iar afixele punctelor le notăm cu litere mici. Considerăm $\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. Punctul B se obține prin rotația de centru O și unghi de 60° a punctului A și vom avea că $b = a\varepsilon$. Analog avem că $d = c\varepsilon, f = e\varepsilon, h = g\varepsilon, m = \frac{b+c}{2} =$

$$\frac{a\varepsilon + c}{2}, n = \frac{e + c\varepsilon}{2}, q = \frac{g + e\varepsilon}{2}, t = \frac{a + g\varepsilon}{2}.$$

Patrulaterul $MNQT$ este paralelogram $\Leftrightarrow m + q = n + t \Leftrightarrow (\varepsilon - 1)(a - c - g + e) = 0$.

Deoarece $\varepsilon \neq 1$, relația este echivalentă cu $a + e = c + g \Leftrightarrow ACEG$ paralelogram.



Barem de corectare

În planul complex fixăm originea în punctul O , iar afixele punctelor le notăm cu litere mici. Considerăm $\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. Punctul B se obține prin rotația de centru O și unghi de 60° a punctului A și vom avea că $b = a\varepsilon$. Analog avem că $d = c\varepsilon$, $f = e\varepsilon$, $h = g\varepsilon$,	2p
$m = \frac{b+c}{2} = \frac{a\varepsilon+c}{2}$, $n = \frac{e+c\varepsilon}{2}$, $q = \frac{g+e\varepsilon}{2}$, $t = \frac{a+g\varepsilon}{2}$	2p
Patrulaterul $MNQT$ este paralelogram $\Leftrightarrow m+q=n+t \Leftrightarrow (\varepsilon-1)(a-c-g+e)=0$	2p
Deoarece $\varepsilon \neq 1$, relația este echivalentă cu $a+e=c+g \Leftrightarrow ACEG$ paralelogram.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.